

椭圆形的精密作图法

丰 忠 焕

(精密机械工程系)

摘 要

本文通过数学论证,介绍一种简便的,精密的椭圆作图法——八心圆法。它与历来沿用的各种椭圆作图法相比,具有精度高,连接圆滑,外形更美观等优点,尤其对于使用椭圆形罐头的容器更有实际的经济意义。

一、前 言

椭圆形零件在机械设计和制造中有着广泛的应用,如洒水车的贮水罐、运油车的贮油罐、椭圆柱齿轮、椭圆形冲裁模、拉延模等。在生产实践中,通常用圆弧曲线来近似地代替理想的椭圆,这无论在设计和制造上都有很大的方便。因此,寻找一种既简单而又较精确的作图法,便成为人们感兴趣的课题。目前虽然已有多种计算及作图法,但偏差往往很大。例如《机械制造》83年第10期第42页介绍的精度高的椭圆作图法,其误差就相当大。按其所举的例题,最小曲率半径与理论值相差25%,最大曲率半径与理论值相差7%。而本文介绍的方法,其最小曲率半径和最大曲率半径与理论值一致。

目前,大都应用四段圆弧来代替椭圆轨迹的所谓四心圆法,如用这种方法生产的鱼罐头盒,由于曲线连接不够圆滑、外形不够美观,而大大影响鱼罐头在国际市场上的销路。所以,用于制作椭圆形罐头盒的模具,其椭圆外形的合理设计,是目前一个迫切需要解决的理论问题。下面介绍用八段圆弧来代替理想椭圆的精密作图法——八心圆法。

二、精确作图法(以四分之一图形为例)

圆弧半径计算公式为

$$R_1 = O_1A = \frac{b^2}{a}; \quad R_2 = O_2H = \sqrt{ab}; \quad R_3 = O_3B = \frac{a^2}{b}$$

本文1987年4月26日收到。

1. 作图法

已知椭圆长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$.

步骤(作四分之一椭圆): (1) 画长半轴 $OA=a$, 短半轴 $OB=b$. (2) 过 A 作 $AC \parallel OB$ (等于 b); 过 B 作 $BC \parallel OA$ (等于 a). (3) 过 C 点作 $O_3C \perp AB$, 交 OA 于 O_1 且交 BO 的延长线于 O_3 , 则 $O_1A=R_1$, $O_3B=R_3$. (4) 在 AO 延长线上取 $OD=b$, 把 AD 二等分, 得二等分点 E . 以 E 为圆心, EA 为半径画弧, 交 OB 的延长线于 F 点, 则 $OF=R_2$. (5) 求 O_2 点位置: 在 BO_3 上截取 $BG=OF=R_2$, 以 O_3 为圆心, $O_3G (=R_3-R_2)$ 为半径画弧; 又以 O_1 为圆心, 以 $(OF-R_1)$ 为半径画弧, 两圆弧相交于 O_2 , 则 O_2 点为圆 O_2 的圆心. (6) 以 O_1 为圆心, R_1 为半径画弧, 得 \widehat{AP} 弧 (P 点在 O_2O_1 的延长线上) 以 O_2 为圆心, OF 为半径画弧, 得 \widehat{PH} ; 以 O_3 为圆心, $O_3B=R_3$ 为半径画弧, 得弧 \widehat{BH} (H 在 O_3O_2 的延长线上).

2. 公式证明

(1) $Rt\triangle CAO_1 \sim Rt\triangle BOA$ (图2). 由于 $O_1A/AC=OB/OA$, $R_1/b=b/a$, 所以

$$R_1 = \frac{b^2}{a} \quad (1)$$

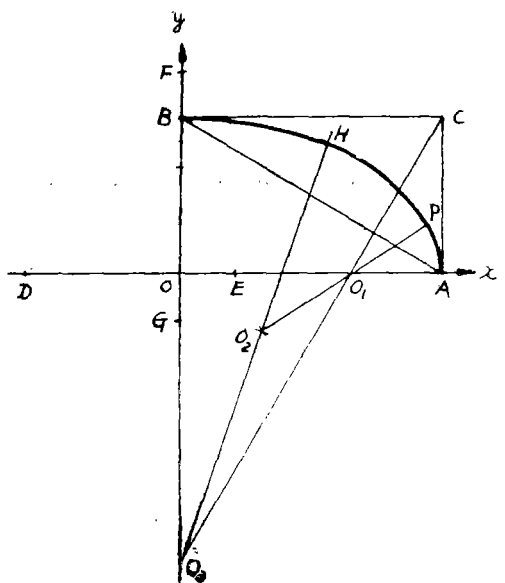


图 1

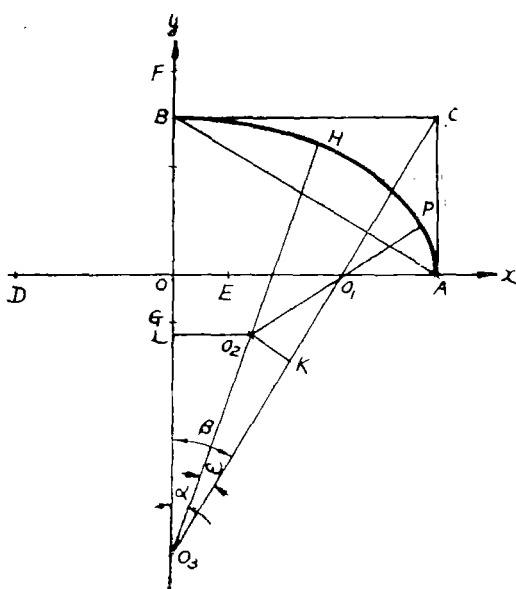


图 2

(2) 根据作图, 在 $Rt\triangle FOE$ 中, 因为 $AE=(a+b)/2$, $OE=a-(a+b)/2$. 所以

$$R_2 = OF = \sqrt{EF^2 - OE^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab} \quad (2)$$

(3) $Rt\triangle CBO_3 \sim Rt\triangle AOB$, $BC/BO=O_3B/AO$, $a/b=R_3/a$, 所以

$$R_3 = \frac{a^2}{b} \quad (3)$$

同时圆 O_2 与圆 O_1 内切, 圆 O_2 与圆 O_3 内切, 则该曲线平滑过渡.

(4) 求 O_2 点的坐标 (x_{02}, y_{02}) (图2)

(I) 先证明 O_2 点确实存在, 即两弧能相交, 如有交点, 则 $O_3O_2 + O_2O_1 > O_3O_1$. 因为 $O_3O_2 = R_3 - R_2$, $O_2O_1 = R_2 - R_1$, 即 $(R_3 - R_2) + (R_2 - R_1) > O_3O_1$, $R_3 - R_1 > O_3O_1$, 取其平方得 $(R_3 - R_1)^2 > O_3O_1^2$. 因为 $O_3O^2 + OO_1^2 = O_3O_1^2$, 所以

$$(R_3 - R_1)^2 > O_3O^2 + OO_1^2 \quad (4)$$

将式 $R_3 = a^2/b$, $R_1 = b^2/a$, $O_3O = (b^2 - a^2)/b$, $OO_1 = (a^2 - b^2)/a$ 代入式(4)整理后得

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

即

$$(a - b)^2 > 0$$

上式恒成立, 故两弧确有交点, 而交点一般有两个. 在本作图中取距椭圆中心 O 较近的那个交点为 O_2 ; 另一交点不符合作图要求.

(II) 再求 O_2 点的坐标

在 $Rt\triangle O_3LO_2$ 中,

$$O_3O_2 = R_3 - R_2,$$

$$X_{02} = O_2L = (O_3O_2) \sin \alpha = (R_3 - R_2) \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} y_{02} &= OL = O_3B - OB - O_3L = R_3 - b - (O_2O_3 \cos \alpha) \\ &= R_3 - b - (R_3 - R_2) \cos \alpha \end{aligned}$$

而 $\alpha = \beta - \omega$, $\tan \beta = R_1/b$, 则 $\beta = \arctan R_1/b$

$\cos \omega = O_3K/(R_3 - R_2)$, $\omega = \arccos [O_3K/(R_3 - R_2)]$ 在 $\triangle O_1O_2O_3$ 中, $OO_1 = a - R_1$, $O_1O_3 = (a - R_1)/\sin \beta$, 根据余弦定理得 $O_1O_2^2 = O_3O_2^2 + O_3O_1^2 - 2(O_2O_3)(O_3O_1)\cos \omega$, 因为 $O_3K = O_3O_2 \cos \omega$, 所以

$$(R_2 - R_1)^2 = (R_3 - R_2)^2 + \left(\frac{a - R_1}{\sin \beta} \right)^2 - 2 \frac{a - R_1}{\sin \beta} \cdot O_3K$$

$$O_3K = \frac{(R_3 - R_2)^2 + [(a - R_1)/\sin \beta]^2 - (R_2 - R_1)^2}{2(a - R_1)/\sin \beta}$$

三、理论根据

(1) 计算椭圆在顶点 A 、 B 处的曲率半径及曲率中心坐标(图3)

椭圆方程为

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

$$x' = -a \sin t, \quad y' = b \cos t$$

$$x'' = -a \cos t, \quad y'' = -b \sin t$$

令 $R(t)$ 为椭圆在任意点 (x_t, y_t) 处的曲率半径. 由曲率半径公式得

$$R_t = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|}$$

则

$$R_t = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

在点 $A(a, 0)$ 处, $t = 0$ 所以

$$R_1 = R_A = \frac{(a^2 \sin^2 0 + b^2 \cos^2 0)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}$$

在点 $B(0, b)$ 处, $t = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$R_2 = R_B = \frac{(a^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\pi}{2})^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^3}{ab} = \frac{a^2}{b}$$

由此可见, 椭圆在 A 处的曲率半径与作图的 R_1 半径公式一致. 椭圆在 B 处的曲率半径与作图的 R_2 半径公式一致. 说明这种画法在椭圆顶点处是准确的. 其曲率中心为:

椭圆在点 A 处曲率中心坐标为 $(\frac{a^2 - b^2}{a}, 0)$;

椭圆在点 B 处曲率中心坐标为 $(0, \frac{b^2 - a^2}{b})$

(2) 上面已证明圆弧(1)和圆弧(3)分别在椭圆顶点处的曲率圆上, 余下的问题便是证明圆弧(2)中也有椭圆上的点.

为此, 我们先求点 O_3 到椭圆上的点的最大距离. 设 $N(x, y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的任意

点, 则 $x^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2})$. 令 \sqrt{V} 为点 O_3 到点 $N(x, y)$ 的距离, 即 O_3N . 则

$$V = x^2 + (y - \frac{b^2 - a^2}{b})^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2}) + (y - \frac{b^2 - a^2}{b})^2$$

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{a^2}{b^2} \times 2y + 2(y - \frac{b^2 - a^2}{b}) = 2y(1 - \frac{a^2}{b^2}) - 2(\frac{b^2 - a^2}{b})$$

令 $dV/dy = 0$, 得 $(1 - a^2/b^2)y = (b^2 - a^2)/b$, 所以 $y = b$. 而 $d^2V/dy^2 = 2(1 - a^2/b^2)$, 因为 $a/b > 1$, 所以

$$\frac{d^2V}{dy^2} < 0$$

故当 $y = b$ 时, \sqrt{V} 取得极大值 $\sqrt{V} = \frac{a^2}{b}$, 又因为驻点是唯一的, 故此极大值必为最大值.

所以点 O_3 到椭圆上的点的最大距离为 $\frac{a^2}{b}$ 即 R_3 . 这说明圆弧(3)除了 B 点在椭圆上外, 其余各点均在椭圆外部.

现在再来求点 O_1 到椭圆上的点的最小距离.

设点 $M(x, y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的任意点, 则

$$y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$$

令 \sqrt{u} 为点 O_1 到点 $M(x, y)$ 的距离, 即 O_1M . 则

$$u = (x - \frac{a^2 - b^2}{a})^2 + y^2 = (x - \frac{a^2 - b^2}{a})^2 + b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2})$$

$$\frac{du}{dx} = 2(x - \frac{a^2 - b^2}{a}) - \frac{b^2}{a^2} \times 2x = 2x(1 - \frac{b^2}{a^2}) - 2(\frac{a^2 - b^2}{a})$$

令 $du/dx = 0$, 得 $(1 - b^2/a^2)x = (a^2 - b^2)/a$, 所以

$$x = a$$

而 $d^2u/dx^2 = 2(1 - b^2/a^2)$, 因为 $b/a < 1$, 所以

$$d^2u/dx^2 > 0$$

当 $x = a$ 时, u 取得极小值 $\sqrt{u} = b^2/a$, 又驻点唯一, 故此极小值必为最小值。故点 O_1 到椭圆上的点的最小距离为 b^2/a , 即 R_1 。

这说明圆弧(1)除了点A在椭圆上外, 其余各点均在椭圆内部。设H、P分别为圆弧(2)与圆弧(3)、圆弧(1)的切点, 则点H在椭圆的外部, 而点P在椭圆的内部, 这样, 圆弧(2)显然必与椭圆相交, 即圆弧(2)中确有椭圆上的点。

综上所述, 我们用三种不同半径, 八个圆心的八段圆弧平滑连接, 来近似表示一个椭圆, 在这八段圆弧中各自都有椭圆上的点, 其实质是用圆弧与椭圆顶点处的曲率圆平滑连接而形成一个椭圆的, 虽然要画八条圆弧, 然而方法却比较简单, 尤其是在各顶点处, 这种画法还是很准确的。

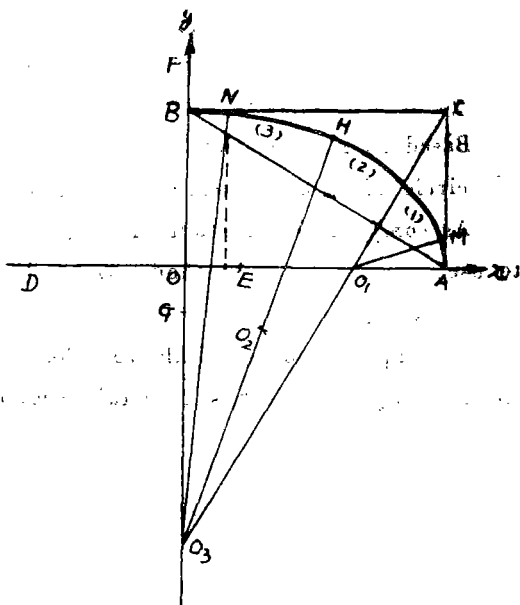


图 3

参 考 文 献

- [1] 同济大学数学组, 高等数学, 高等教育出版社, (1981).
- [2] 张宝顺, 椭圆的简便作图法, 机械制造, 10(1983).

A Precise Graphic Method for Plotting an Ellipse

Feng Zhonghuan

Abstract

Based on mathematical demonstration, this paper presents a graphic method of "circle of eight centers" for plotting an ellipse.

As compared with other ellipsographic methods constantly used and continued to use, this is a method with high precision, smooth connections and fine-looking.

It is applicable especially for the designing of elliptic container such as elliptic can. Thus it has a certain economic significance practically.