

双顺向解耦模式的计算方法

王永初

(精密机械工程系)

摘 要

本文介绍一种解耦模式的新结构和解耦网络的计算方法。这种模式由两个顺向解耦网络组成,它具有两个特点:两个模式设置在顺向通道,而不是在反馈通道;解耦动作是在控制指令信号影响对象之前就产生,所以这种双解耦模式可以有效地应用于多变量系统的实时解耦控制与完全解耦控制。解耦矩阵 D_1 与 D_2 按公式 $D_1 = -E^{-1}\eta$, $D_2 = -\eta^{-1}$ 计算。

一、问题的提出

一个 m 维输入与 m 维输出的控制系统,其对象特性可以写成

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (1b)$$

式(1a)称为状态方程,式(1b)称为观察方程。其中 X 为 n 维状态向量, u 为 m 维控制输入向量, Y 为 m 维输出向量, A 为 $n \times n$ 状态矩阵, B 为 $n \times m$ 控制矩阵, C 为 $m \times n$ 观察矩阵。

式(1)可以用图1所示的方框图表示,显然系统开环的传递函数为

$$Y(s)u(s)^{-1} = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

对这个系统实现最佳控制,即使

$$J = \int_0^\infty (X^T Q X + u^T R u) dt \Rightarrow \min$$

控制向量应选择为^[1]

$$u(t) = -K_u X(t) \quad (3)$$

$$K_u = R^{-1}B^T M \quad (4)$$

其中 M 为如下 Reccatti 方程的解^[2-4]

$$\dot{M}(t) + M(t)A(t) - M(t)K(t)M(t) + A^T(t)M(t) + Q(t) = 0 \quad (5)$$

求多维系统 Reccatti 方程的解本身比较复杂^[3],更主要的是大多数控制系统均不属于线性定常系统,对象的特性会随着时间的迁移而变化,因此要求控制系统具有在线辨识模型及修改反馈控制矩阵 K_u 的能力,这样往往将一个控制系统设计得异常复杂,以致需要应用大

本文1986年6月3日收到。

型快速的计算机作为自动化系统的工具。因此近十多年来,许多控制系统工作者都致力于解耦控制方法的研究,如英国的 Rosenbrock 等人^[5]利用经典频率法与现代控制理论相结合,提出了对角优势的解耦方法,这种方法较多依赖于工程人员丰富的实践经验,而且需要在计算机辅助设计系统的支援下才能实现。这种方法在图1的基础上加入一个顺向解耦网络 $V(s)$ 与反馈解耦网络 $F(s)$,构成图2所示的解耦系统。其中

$$G(s) = B(s)(sI - A)^{-1}C(s) + V(s)$$

但是, $V(s)$ 只有理论上的意义而没有实际应用的意义,原因是即使 $u(s)$ 至 $Y^*(s)$ 完全解耦,并没有说明 $u(s)$ 至 $Y(s)$ 完全解耦,而 $Y(s)$ 是实际被控制向量的观察向量,所以一般解耦均为图2(b)所示的形式。其实图2(b)的解耦方式,早在六十年代的初期已有不少进行研究^[6],然而却没有在工程实践中应用,同样存在着固有的缺点。 $G(s)$ 表示耦合对象的特性矩阵。由图2(b)得到闭环传递函数为

$$W(s) = G(s)[I + F(s)G(s)]^{-1} \quad (6)$$

解耦的目的是使原来的耦合对象变成一个无耦合的对象,一个被控制变量由一个输入变量来控制,这种一一配对的控制方式将一个复杂的有 m 个被控制变量的耦合系统演变成 m 个单变量系统来处理,理想的解耦是一个输入变量只影响与它配对的被控制变量,而对其它被控制变量不发生影响。这就要求 $W(s)$ 变成一个对

角矩阵

$$W(s) = G_A(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{22}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (7)$$

即

$$G(s)[I + F(s)G(s)]^{-1} = G_A(s)$$

或者

$$G(s) = G_A(s) + G_A(s)F(s)G(s)$$

上式左乘 $G_A(s)^{-1}$,再右乘 $G(s)^{-1}$,则可得到

$$F(s) = G_A(s)^{-1} - G(s)^{-1} \quad (8)$$

这种解耦理论上是可以实现、实际上是不可以实现的。原因是输入向量作用已在输出向量中产生影响,尔后才施加解耦作用,由于影响已经产生,将其影响在时空间中抹去是不可能的,同时反馈的性质会发生变化,由负反馈演变成正反馈,而且反馈量相当大,甚至是输出向量正常变化量的许多倍,所以正反馈解耦具有本质的不稳定性。

对目前多变量系统存在的上述困难,作者提出一个双顺向解耦模式的结构设想,并从理论上解决解耦模式的设计计算问题。

二、解耦与控制模式

一个理想的控制模式应包括两个部分:解耦部分与最优控制部分。解耦作用发生在前,最优控制产生在后,如图3所示的结构,即双顺向解耦结构。本解耦模式的特点是解耦作用是在控制作用进入耦合对象之前产生。原耦合对象记为

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mm}(s) \end{pmatrix} = B(sI - A)^{-1}C \quad (9)$$

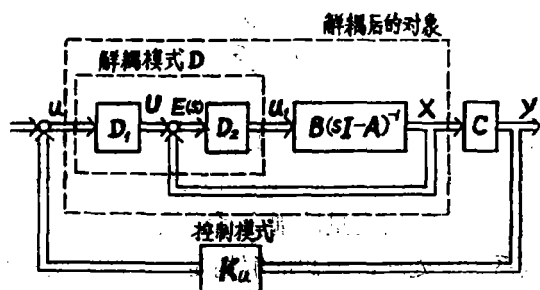


图3

根据状态方程

$$\dot{X} = AX + Bu_1$$

观察方程

$$Y = CX$$

以及

$$u_1 = D_2(X + U)$$

$$U = D_1 u$$

对上述诸式拉普拉斯变换,并整理可得

$$Y(s)u(s)^{-1} = C[SI - A - BD_2]^{-1}BD_1D_2 \triangleq W(s) \quad (10)$$

$W(s)$ 为解耦系统的传递函数。预期的 $W(s)$

应该是一个对角形矩阵, $W(s)$ 的选择有许多形式,但要达到解耦, $W(s)$ 一定是对角形的矩阵,即使如此, $W(s)$ 还可以有许多。例如, (1) 保留 $G(s)$ 的对角线上的元素作为 $W(s)$ 的元素; (2) 选择 $G(s)$ 元素的降阶模型; (3) 采用美籍华人学者陈启宗教授的方法,即对角线上的元素为 s^{-k_i} , 其中, k_i 为矩阵 $G(s)$ 对角线上元素 $G_{ii}(s)$ 的分母多项式高于其分子多项式的阶次,解耦后的对象变成

$$W(s) = \begin{pmatrix} s^{-k_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{-k_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s^{-k_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & s^{-k_m} \end{pmatrix}$$

显然, $W(s)$ 变成一个有 m 个被控制变量与 m 个操纵变量无耦合的被控制对象。采用陈氏方法在实现上的困难是每一个配对的对象特性处于 S 复平面的虚轴上,从控制系统的稳定性看,该解耦系统是处在稳定边界上,原对象特性稍微变化,就会使解耦系统变得不稳定和难于估计,因此我们建议的 $W(s)$ 是一个 k_i 阶惯性环节,即

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+\beta_1)^{k_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+\beta_2)^{k_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(s+\beta_m)^{k_m}} & \end{pmatrix}$$

$\beta_i, i=1, 2, \dots, m$ 均取正数值, 只要选择适当的大小 (根据对象特性可能变化的大小而定), 仍可保持解耦后系统的稳定, 于是有

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \\ W_3(s) \\ \vdots \\ W_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(s+\beta_1)^{-k_1} \\ e_2(s+\beta_2)^{-k_2} \\ e_3(s+\beta_3)^{-k_3} \\ \vdots \\ e_m(s+\beta_m)^{-k_m} \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中, e_i 为单位行向量, 即第 i 个元素为 1, 其它元素为零的行向量。

为了分析方便, 记

$$W(s) = M(s)D_1D_2 \quad (12a)$$

其中

$$M(s) = C[sI - A - BD_2]^{-1}B \quad (12b)$$

三、 D_2 与 D_1 实现解耦的条件

解耦前的原对象

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \\ \vdots \\ G_m(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13a)$$

其中

$$G_i(s) = C_i(sI - A)^{-1}B \quad (13b)$$

在一般情况下, $(sI - A)^{-1}$ 可记为^[7]

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det[sI - A]} (s^{n-1} + \alpha_1 s^{n-2} + \alpha_2 s^{n-3} + \cdots + \alpha_{n-1}) \quad (14a)$$

其中

$$\det[sI - A] = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \cdots + \beta_n \quad (14b)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= A + \beta_1 I \\ \alpha_2 &= A\alpha_1 + \beta_2 I \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= A\alpha_{i-1} + \beta_i I \\ \beta_1 &= -t_r A \\ \beta_2 &= -\frac{1}{2} t_r (\alpha_1 A) \\ &\vdots \\ \beta_{n-i} &= -\frac{1}{i} t_r (\alpha_{i-1} A) \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

因此式(13b)写成

$$C_i(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\det[sI - A]} (C_i B s^{n-1} + C_i \alpha_1 B s^{n-2} + \cdots + C_i \alpha_i B s^{n-i+1} + \cdots + C_i \alpha_{n-1} B) \quad (15c)$$

当 $G_i(s)$ 的元素中, 分母的 s 阶数比分子 s 的阶数大 k_i 阶时, 则 s^{n-k_i+1} 前面项的系数均应为零, 即

$$\left. \begin{aligned} C_i B &= 0 \\ C_i \alpha_1 B &= 0 \\ &\vdots \\ C_i \alpha_{k_i-2} B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

故有

$$C_i(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\det[sI - A]} (C_i \alpha_{k_i-1} B s^{n-k_i} + C_i \alpha_{k_i} B s^{n-k_i-1} + \cdots + C_i \alpha_{n-1} B) \quad (17)$$

仿照式(13)的展开方法, 式(10)可以展开为

$$M_i(s) = \frac{1}{\det[sI - A - BD_2]} [C_i B s^{n-1} + C_i \alpha_1 B s^{n-2} + \cdots + C_i \alpha_{k_i} B s^{n-k_i-1} + \cdots + C_i \alpha_{n-1} B] \quad (18a)$$

其中

$$\det[sI - A - BD_2] = s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n \quad (18b)$$

在式(18)的展开式中, 系数矩阵 α_i 与系数 b_i 有如下关系

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (A + BD_2) + b_1 I \\ \alpha_2 &= (A + BD_2)\alpha_1 + b_2 I \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n-i} &= (A + BD_2)\alpha_{n-i-1} + b_{n-i} I \\ b_1 &= -t_r(A + BD_2) \\ b_2 &= -\frac{1}{2} t_r[\alpha_1(A + BD_2)] \\ &\vdots \\ b_i &= -\frac{1}{i} t_r[\alpha_{i-1}(A + BD_2)] \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

同样假设 $M_i(s)$ 元素中分母的 s 阶次比分子 s 的阶次之差最小的一个是 k_i 阶, 显然有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s + \beta_i)^{k_i} M_i(s) = E_i \quad (20)$$

并按式(16)的推论, 同样可得

$$\begin{cases} C_i B = 0 \\ C_i a_1 B = 0 \\ C_i a_2 B = 0 \\ \vdots \\ C_i a_{k_i-2} B = 0 \end{cases} \quad (21a)$$

以及

$$C_i a_{k_i-1} B \neq 0 \quad (21b)$$

于是有

$$E_i = C_i a_{k_i-1} B \quad (21c)$$

式(21)为 D_1 与 D_2 满足完全解耦的条件。

四、 D_1 与 D_2 的计算公式

利用式(19a)的关系, 式(21)可写成

$$E_i = \begin{cases} C_i (A + BD_2)^i B = 0 & i \leq k_i - 2 \\ C_i (A + BD_2)^i B \neq 0 & i = k_i - 1 \end{cases} \quad (22)$$

因为

$$C_i (A + BD_2)^i B = C_i A^i B + i C_i A^{i-1} B D_2 B + C_i \frac{i(i-1)}{2} A^{i-2} (B D_2)^2 B + \cdots + C_i (B D_2)^i B \quad (23)$$

注意式(15b)与式(16)的关系, 可以知道

$$\begin{aligned} C_i B D_2 &= 0 \\ C_i A B D_2 &= 0 \\ C_i A^2 B D_2 &= 0 \\ &\vdots \\ C_i A^{k_i-2} B D_2 &= 0 \end{aligned}$$

则由式(23)可得

$$E_i = C_i (A + BD_2)^{k_i-1} B = C_i A^{k_i-1} B \quad (24)$$

且知

$$E_{i+1} = C_i (A + BD_2)^{k_i} B = C_i (A + BD_2)^{k_i-1} (A + BD_2) B = (C_i A^{k_i-1} B + C_i A^{k_i-1} B D_2) B = 0 \quad (25)$$

若取

$$B = I$$

并令

$$C_i A^{k_i-1} = \eta_i \quad (26)$$

则由式(24)可得

$$E_i D_1 = -\eta_i$$

根据预期的闭环传递函数, 显然 E_i 应为一个行向量, 故有

$$ED_1 = -\eta$$

或者

$$D_1 = -E^{-1}\eta \quad (27)$$

其中

$$\eta = \begin{pmatrix} C_1 A^{k_1} \\ C_2 A^{k_2} \\ \vdots \\ C_m A^{k_m} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix} \quad (28)$$

式(28)为式(27)的顺向解耦网络 D_1 的解。为了求 D_2 网络的解, 需要利用式(12)的关系, 即

$$(s + \beta_i)^{k_i} W_i(s) = (s + \beta_i)^{k_i} M_i(s) D_1 D_2 \quad (29)$$

由于

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s + \beta_i)^{k_i} W_i(s) = e_i$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s + \beta_i)^{k_i} M_i(s) = E_i$$

故知

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix} D_1 D_2 \quad (30)$$

由于

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = I$$

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix}$$

由式(30)可得

$$D_1 D_2 = E^{-1} \quad (31)$$

$$D_2 = D_1^{-1} E^{-1} = -\eta^{-1} \quad (32)$$

式(32)为顺向解耦网络 D_2 的解。按照式(27)与式(32)选择 D_1 与 D_2 , 其解耦的结果得到式(11)所示的 $m \times m$ 无耦合实际控制对象, 输出变量与控制输入变量实现了一一配对, 即达到第 i 个控制输入只影响到第 i 个控制输出。这样, 我们就将一个有 n 个状态变量、 m 个控制输入与 m 个控制输出的复杂控制系统, 演变成 m 个单回路单输出变量的简单系统, 系统设计工作可以达到极大的简化。

由于双模顺向的解耦系统, 其结构类似于经典控制的串级控制系统, 串级控制在设计和

系统的投运方面经验比较成熟,而且 D_2 的选择范围较宽,主要使 D_2 满足 $M(s)$ 稳定的条件。在此基础上确定, D_1 使 $W(s)$ 满足 $\lim_{s \rightarrow \infty} (s + \beta_i)^{t_i} W_i(s) = e_i$ 。这样现有的多变量控制系统的专用辅助设计程序,可以在双模顺向解耦控制中应用。

参 考 文 献

- [1] 王永初编著,最佳控制系统设计基础,科学出版社,(1980)。
- [2] 王永初,控制系统黎卡提方程的数值解方法探讨,自动化与仪器仪表,1(1981)。
- [3] Kleiman D. E., On an Iterative Technique for Riccati Equation Computation, IEEE, AC-13, 4, (1968)。
- [4] Athans, M., Systems, Networks and Computation Multivariable Methods, McGraw-Hill, (1974)。
- [5] Rosenbrock, H. H., State space and Multivariable Theory, John Wiley & Son, (1970)。
- [6] Gibson, J. E., Nolinear Automatic Control, McGraw-Hill, (1963)。
- [7] 王永初,任秀珍编著,现代控制工程的数学基础,化学工业出版社,(1985)。
- [8] Patel, R. V., Multivariable System Theory and Design, Pergamon Press, (1982)。
- [9] Wolovich, W. A., A Division Algorithm for Polynomial matrices, IEEE, Trans. Automatic Control, AC-29, 7, (1984)。

Calculation of the Dual Forward Decoupling Mode

Wang Yongchu

Abstract

In this paper, the structure of a decoupling mode as well as the calculation of decoupling network are presented. This kind of mode which composed of two forward decoupling networks are characterized by the following two features: two modes placed on forward path instead of on feedback path; its decoupling generated before the controlling instruction signal operating on the process so that it may be used efficiently in real time decoupling control and complete decoupling control of the linear multivariable system. Decoupling matrices D_1 and D_2 may be calculated according to these expressions: $D_1 = -E^{-1}\eta$; $D_2 = -\eta^{-1}$.