

# 一个直接计算结构动力方程的方法

谢闽生 麦淑良

(土木工程系)

## 摘 要

以往计算结构动力方程的无条件稳定积分格式的证明,均假定阻尼为古典阻尼,即阻尼矩阵满足振型正交条件.本文给出的无条件稳定积分格式的证明,可不要求阻尼矩阵满足振型正交条件.同时本文方法具有较好的算法阻尼比和周期延长率,而且没有超越现象.

## 一、前 言

直接积分法是结构动力分析中常用的方法.从稳定的角度上分,直接积分法可分为条件稳定的积分格式,如中心差分法、线性加速度法及龙格库塔法;和无条件稳定的积分格式,如Houbolt法, Wilson- $\theta$  法等等.由于条件稳定积分格式的步长要小于临界步长,这就导致了两个困难,首先要附加一个估计临界步长的程序,其次即使估计出临界步长,如临界步长过小,则将耗费过多的机时才能得到正确的响应.否则如使用一个大于临界步长的步长,则积分不稳定,这意味着数值积分在计算机上的舍入误差会逐渐增大,使响应的计算失去意义.正是由于以上原因,限制了条件稳定积分格式的运用;而无条件稳定积分格式在选择步长时不受临界步长的限制,使得无条件稳定积分格式在工程中得到广泛运用.但需要指出:以往的无条件稳定积分格式的证明,实际上稳含着阻尼为古典阻尼,即阻尼矩阵满足振型正交条件<sup>[1,2]</sup>,当阻尼矩阵不满足振型正交条件时没证明它们的无条件稳定性.由于现代科学的进一步发展,有不少工程问题(海洋平台及核电站中的设备基础和下部结构共同工作等)依旧假定阻尼矩阵满足振型正交条件将产生很大的误差<sup>[4]</sup>.于是需要提出一种不但适用于古典阻尼而且适用于非古典阻尼的无条件稳定积分格式.

本文导出了一种不仅适用于古典阻尼而且适用于非古典阻尼的无条件稳定积分格式.讨论了该积分格式的数值阻尼比和周期延长率,并且分析了该格式的超越现象.

本文1987年1月10日收到.

## 二、无条件稳定性的证明

一个 $n$ 个自由度的结构动力方程为

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (1)$$

其中 $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 分别是结构的质量、阻尼和刚度矩阵。 $\{\ddot{U}\}$ 、 $\{\dot{U}\}$ 、 $\{U\}$ 分别是结构的加速度、速度和位移向量， $\{R\}$ 是处荷载向量。

这个二阶的常微方程组可改写成如下等价的一阶常微分方程组

$$[A]\{\dot{Z}\} + [B]\{Z\} = \{Y\} \quad (2)$$

其中 $[A]$ 和 $[B]$ 是 $2n \times 2n$ 的矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix}$$

$\{Z\}$ 和 $\{Y\}$ 是 $2n$ 个元素的向量

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{U}\} \\ \{U\} \end{Bmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{R\} \end{Bmatrix}$$

设方程(2)的齐次解为： $\{Z\} = \{\phi\} e^{st}$ ，代入式(2)得

$$S[A]\{\phi\} + [B]\{\phi\} = 0 \quad (3)$$

由文献[3]、[4]可知

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} S_i \{\phi_i\} \\ \{\phi_i\} \end{Bmatrix}$$

其中<sup>[5]</sup>

$$S_i = -\xi_i \omega_i \pm i \omega_{Di}$$

$\omega_i$ 、 $\omega_{Di}$ 和 $\xi_i$ 的定义如下

$$\omega_i = |S_i|, \quad \xi_i = -\operatorname{Re}(S_i)/|S_i|, \quad \omega_{Di} = \omega_i(1 - \xi_i^2)^{1/2}$$

设 $\{\phi_i\}$ 、 $\{\phi_j\}$ 分别为式(3)的第 $i$ 个和第 $j$ 个振型向量，可得

$$S_i[A]\{\phi_i\} + [B]\{\phi_i\} = 0 \quad (4)$$

$$S_j[A]\{\phi_j\} + [B]\{\phi_j\} = 0 \quad (5)$$

用 $\{\phi_j\}^T$ 、 $\{\phi_i\}^T$ 分别乘以式(4)、(5)得

$$S_i \{\phi_j\}^T [A] \{\phi_i\} + \{\phi_j\}^T [B] \{\phi_i\} = 0 \quad (6)$$

$$S_j \{\phi_i\}^T [A] \{\phi_j\} + \{\phi_i\}^T [B] \{\phi_j\} = 0 \quad (7)$$

由于 $[K]$ 、 $[M]$ 和 $[C]$ 是对称方阵( $[C]$ 不必满足振型正交条件)，则式(6)转置后可写成

$$S_i \{\phi_i\}^T [A] \{\phi_j\} + \{\phi_i\}^T [B] \{\phi_j\} = 0 \quad (8)$$

$$(S_j - S_i) \{\phi_i\}^T [A] \{\phi_j\} = 0$$

由于 $S_j - S_i \neq 0$ ，故

$$\{\phi_i\}^T [A] \{\phi_j\} = 0 \quad (9)$$

根据式(7)有

$$\{\phi_i\}^T [B] \{\phi_j\} = 0 \quad (10)$$

当 $i = j$ 时，可得

$$S_i = - \frac{\{\phi_i\}^T [B] \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T [A] \{\phi_i\}}$$

设振型坐标  $\{Z\} = [\phi] \{z\}$  代入方程 (2), 利用正交条件 (6)、(10) 可得  $2n$  个独立的一次微分方程

$$A_i \dot{z}_i + B_i z_i = \{\phi_i\}^T \{Y\} \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (11)$$

也可写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_i - S_i z_i &= \{\phi_i\}^T \{Y\} / A_i, & i &= 1, 2, \dots, 2n \\ A_i &= \{\phi_i\}^T [A] \{\phi_i\}, & B_i &= \{\phi_i\}^T [B] \{\phi_i\} = -S_i A_i \end{aligned} \quad (12)$$

如果式 (12) 中的  $2n$  个方程都用相同的积分格式和相同的时间步长  $\Delta t$  直接积分分析, 那么对式 (12)  $2n$  个非耦合方程的分析完全等价于对式 (1) 使用相同的积分格式和相同的时间  $\Delta t$  的直接分析。换句话说, 这时两个过程的数值分析结果完全相同。因此要研究直接积分的精度和稳定性可不去考虑式 (1), 而把注意力集中在同一时间步长  $\Delta t$  方程式 (12) 的积分上。这样有关直接积分方法的稳定性和精度的分析所需考虑的变量只是  $\Delta t$ ,  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , 而不是刚度矩阵, 质量矩阵和阻尼矩阵的所有元素。并且因为式 (12) 中的  $2n$  个方程类似, 我们仅需研究其中的一个典型方程。

大量的工程经验表明, 在结构动力分析中二次精度的方法比一次精度的方法好, Dahlquist 在文献 [6] 中指出不存在三次精度的无条件稳定线性多步法, 故我们仅需把注意力集中到三次精度的无条件稳定线性多步法的积分格式上。

用二次精度的 Gear 法来近似式 (12)。得

$$z_{i,n+1} - \frac{4}{3} z_{i,n} + \frac{1}{3} z_{i,n-1} = \frac{2S_i \Delta t}{3} z_{i,n+1} + \frac{2}{3} \{\phi_i\}^T \{Y\}_{n+1} \Delta t / A_i \quad (13)$$

在讨论式 (13) 稳定性时可使  $\{Y_{n+1}\} = 0$ , 得

$$z_{i,n+1} - \frac{4}{3} z_{i,n} + \frac{1}{3} z_{i,n-1} = \frac{2}{3} S_i z_{i,n+1} \Delta t \quad (14)$$

式 (14) 的特征方程为

$$\left(1 - \frac{2}{3} S_i \Delta t\right) \lambda^2 - \frac{4}{3} \lambda + \frac{1}{3} = 0 \quad (15)$$

式 (14) 的解为

$$z_{i,n} = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + C_3 \lambda_3^n + C_4 \lambda_4^n \quad (19)$$

方程 (14) 中有两对共轭复根, 其中一对  $\lambda_{1,2}$  为主根, 另一对  $\lambda_{3,4}$  为外来根, 它们满足  $|\lambda_{3,4}| < |\lambda_{1,2}|$  由文献 [2], 不管  $\Delta t/T$  取什么值, 如总有

$$\max |\lambda_i| \leq 1 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

称该法为无条件稳定。图 1 为 Gear 法的最大特征值曲线的模。当  $\xi = 0$  时, Gear 法的最大特征值曲线的模不管  $\Delta t/T$  取什么值总小于 1, 当

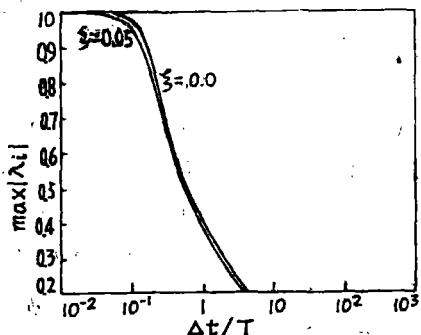


图 1 Gear 法最大特征值曲线

$\xi \neq 0$  时, 最大特征值曲线的模小于  $\xi = 0$  时的最大特征值曲线的模。由此可见 Gear 法是无条件稳定的。

### 三、数值阻尼比和周期延长率的讨论

主根可以写成

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi = \exp[\bar{\Omega}(-\xi \pm i)]$$

式 (16) 可以写成

$$z_n = \exp(-\xi \bar{\Omega} t_n) (C_1 \cos \bar{\Omega} t_n + C_2 \sin \bar{\Omega} t_n) + c_3 \lambda_3^n + c_4 \lambda_4^n$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega} / \Delta t$$

$$\xi = -\ln(A^2 + B^2) / 2\bar{\Omega}$$

$$\bar{\Omega} = \arctan |B/A|$$

$C_j, j = 1, 2, 3, 4$  可以由初始条件来确定,  $\xi$  是计算阻尼比,  $\bar{\Omega}$  是算法频率, 周期延长率为

$$TD = \frac{\omega \Delta t}{\bar{\Omega} \Delta t} - 1$$

算法阻尼比和周期延长率可用来度量算法的精度。

由图 2 可见, Houbolt 法的算法阻尼比最大, Gear 法次之, Wilson- $\theta$  法最小。

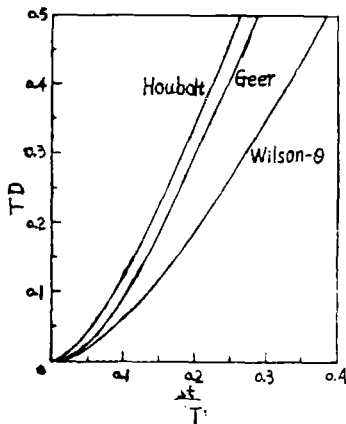


图 3 算法阻尼比的比较

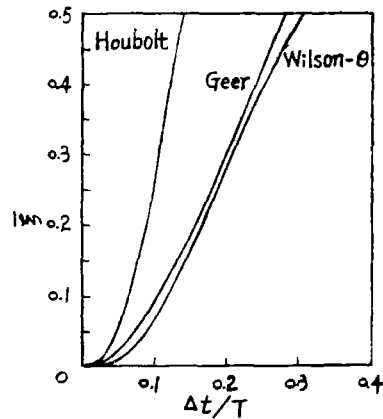


图 3 周期延长率的比较

由图 3 表明, Houbolt 法的周期延长率最大, Gear 法次之, Wilson- $\theta$  法最小。

### 四、超越现象

在计算初始阶段, 当  $\bar{\Omega} = \omega \Delta t$  较大时, 有的方法由于其固有的性质, 会发生位移, 速度的某一项或两项远远超过其真实解的现象, 这就是所谓超越现象。

$n$ 个自由度的动力方程, 对反应有意义的贡献仅为前  $p$  个振型, 如一个方法没有超越现象, 当我们积分步长使  $\omega_p \Delta t$  足够小, 而不用使  $\omega_n \Delta t$  足够小, 就可以得到较准确的分析。在实际工程分析中  $\omega_n/\omega_p$  可能很大, 例可达到 1000 这个数量级。如一个方法有超越现象, 尽管  $\omega_n \Delta t$  仍很大, 这样在计算的初始阶段, 高振型对反应的影响病态的放大。

假定  $\omega \Delta t$  取相当大的值, 仅保留有意义的项, 由文献[7], Wilson- $\theta$  位移和速度可写成

$$U_1 \doteq -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\theta})\Omega^2 U_0 + (1-\frac{1}{\theta^2})\Delta t \dot{U}_0 \quad (17a)$$

$$\dot{U}_1 \doteq (\frac{1}{4\beta\theta} - 1)\Omega\omega U_0 + (1-\frac{1}{2\beta\theta^2})\dot{U}_0 \quad (17b)$$

$\theta = 1.4$ ,  $\beta = 1/6$ ;  $\Omega = \omega \Delta t$ , 如仅保留有意义的项(17a); 式(17b)可写成

$$U_1 \sim O(\Omega^2)U_0 + O(\Delta t)\dot{U}_0 \quad (18a)$$

$$\dot{U}_1 \sim O(\Omega)\omega U_0 + O(1)\dot{U}_0 \quad (18b)$$

由式(14)Gear法可写成(为了方便不写出下标  $i$ )

$$Z_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}S\Delta t} Z_0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}S\Delta t} Z_{-1} \quad (19a)$$

如当  $\omega \Delta t$  取相当大的值时, 仅保留有意义的项, 式19a可写成

$$Z_1 \approx O(1)Z_0 + O(1)Z_{-1} \quad (19b)$$

由式(18a)、(18b)可见, Wilson- $\theta$ 法的位移超越现象是 $\Omega$ 的平方, 速度的超越现象是 $\Omega$ 的一次方。由式(19b)可见Gear法不具有超越现象。表1为当 $\zeta = 0$ ,  $\Delta t = 30s$ ,

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi$ ,  $U_0 = 0$ ,  $\dot{U} = 10cm/s$ 的计算结果。

表 1

$n\Delta t$	30	60	90	120	150	180	210
Wilson- $\theta$ , $U$	146.95	-115.75	94.81	-75.02	58.82	-45.90	35.75
Gear, $U$	0.03	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$n\Delta t$	240	270	300	330	360	390	420
Wilson- $\theta$ , $U$	-27.82	21.64	-16.83	13.09	-10.18	7.91	-1.15
Gear, $U$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

计算也表明Wilson- $\theta$ 法的位移有严重的超越现象, 而Gear法则没有。超越现象的消失要经过一个较长的时间。

## 五、Gear法直接积分格式的步骤

式(13)乘以  $A_i$  可得

$$A_i z_{i+1} = \frac{4}{3} A_i z_i + \frac{1}{3} A_i z_{i-1} + \frac{2}{3} B_i z_{i+1} \Delta t = \frac{2}{3} \Delta t \{ \phi_i \} + \{ Y_{i+1} \}$$

因为  $A_i = \{\phi_i\}^T [A] \{\phi_i\}$ ,  $B_i = \{\phi_i\}^T [B] \{\phi_i\}$ ,  $\{Z\} = [\phi] \{z\}$ , 故

$$[A][\phi] \{z_{n+1} - \frac{4}{3}z_n + \frac{1}{3}z_{n-1}\} + [B][\phi] \{z_{n+1}\} \frac{2}{3}\Delta t = \frac{2}{3}\Delta t \{Y_{n+1}\}$$

把  $[A]$  和  $[B]$  矩阵展开

$$\begin{bmatrix} [o] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{U}_{n+1}\} - \frac{4}{3}\{\dot{U}_n\} + \frac{1}{3}\{\dot{U}_{n-1}\} \\ \{U_{n+1}\} - \frac{4}{3}\{U_n\} + \frac{1}{3}\{U_{n-1}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\Delta t \{\dot{U}_{n+1}\} \\ \frac{2}{3}\Delta t \{U_{n+1}\} \end{bmatrix} = \frac{2\Delta t}{3} \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{R_{n+1}\} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式 (20) 可变换成以下两式

$$\{\dot{U}_{n+1}\} = \frac{3}{2\Delta t} \{U_{n+1} - \frac{4}{3}U_n + \frac{1}{3}U_{n-1}\} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} [m] \{\dot{U}_{n+1} - \frac{4}{3}\dot{U}_n + \frac{1}{3}\dot{U}_{n-1}\} + [c] \{U_{n+1} - \frac{4}{3}U_n + \frac{1}{3}U_{n-1}\} \\ + \frac{2}{3}\Delta t [k] \{U_{n+1}\} = \{R_{n+1}\} \frac{2\Delta t}{3} \end{aligned} \quad (22)$$

把式 (21) 代入式 (22) 整理得

$$[\bar{K}] \{U_{n+1}\} = \{\bar{R}_{n+1}\} \quad (23)$$

其中

$$[\bar{K}] = \frac{3}{2\Delta t} [m] + [c] + \frac{2}{3}\Delta t [k]$$

$$\begin{aligned} \{\bar{R}_{n+1}\} = \frac{2\Delta t}{3} \{R_{n+1}\} + [m] \{ \frac{2}{\Delta t} U_n - \frac{1}{2\Delta t} U_{n-1} + \frac{4}{3}\dot{U}_n - \frac{1}{3}\dot{U}_{n-1} \} \\ + [c] \{ \frac{4}{3}U_n - \frac{1}{3}U_{n-1} \} \end{aligned}$$

用 Gear 法的逐步积分过程

A. 初始计算:

(1) 形成刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵,  $[k]$ 、 $[m]$ 、 $[c]$ , 和初始向量  $\{U_0\}$ 、 $\{\dot{U}_0\}$ ;

(2) 使用特别初始过程计算积分  $\{U_1\}$  和  $\{\dot{U}_1\}$ ;

(3) 计算刚度  $[\bar{K}] = \frac{3}{2\Delta t} [m] + [c] + \frac{2}{3}\Delta t [k]$ ;

(4) 对  $[\bar{K}]$  进行三角分解  $[\bar{K}] = [L]^T [D] [L]$ ;

B. 对每一时间步长:

(1) 计算在时间  $(t + \Delta t)$  的等效荷载:

$$\{\bar{R}_{n+1}\} = \frac{2\Delta t}{3} \{R_{n+1}\} + [m] \{ \frac{2}{\Delta t} U_n - \frac{1}{2\Delta t} U_{n-1} + \frac{4}{3}\dot{U}_n - \frac{1}{3}\dot{U}_{n-1} \} +$$

$$+ [c] \left\{ \frac{4}{3} U_n - \frac{1}{3} U_{n-1} \right\}$$

(2) 求解在时间  $(t + \Delta t)$  的位移:

$$[L]^T [D] [L] \{U_{n+1}\} = \{\tilde{R}_{n+1}\}$$

(3) 计算在时间  $(t + \Delta t)$  的速度:

$$\{\dot{U}_{n+1}\} = \frac{3}{2\Delta t} \left\{ U_{n+1} - \frac{4}{3} U_n + \frac{1}{3} U_{n-1} \right\}.$$

### 参 考 文 献

- (1) 朱镜清, 论结构动力分析中数值稳定性, 力学学报, 7(1983).
- (2) Bathe, K.J., Wilson, E.L., Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods, Ear.Eng.Str.Dyn., 1, 3(1973).
- (3) Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F., Dynamics of Structures, Mc GraW-Hill, New York, (1967).
- (4) Igusa, T., Kiureghian, A.D. and Sackman, J.L., Modal Decomposition Method for stationary Response of Non-Classically Damped Systems. Ear. Eng. Str. Dyn., 1, 9(1984).
- (5) Singh, M.p., Seismic Response by SRSS for Non-Proportional Damping, J.Eng. Mech.Div.ASCE, 106(1980), 1405—1419.
- (6) Dahlquist, G., A Special stability Problem for Linear Multistep Methods, BIT, 3(1963), 27—43.
- (7) Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., Ear.Eng.Str.Dyn., 6(1978), 99—117.

## A Direct Integration Method for the Equations of structural Dynamics

Xie Minsheng Mai Shuliang

### Abstract

In the past, the unconditionally stable direct integration method was demonstrated by presuming the damping to be classical type. It implies that damping matrix must satisfy the condition of orthogonality of vibration mode.

This paper proposes an unconditionally stable direct integration method suitable for both classical and non-classical types of damping.

By comparison with other method given here reveals a better algorithmic damping ratio, a lesser relative periodic ratio error, and no overshooting.