第9卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol.9 No.1
1988年2月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Feb. 1988

内积空间的一些特征

陈 祖 礼

(应用数学系)

摘 要

本文在〔1〕的基础上，继续讨论赋范线性空间成为内积空间的条件. 得到了光滑的赋范线性空间成为内积空间的几个充分必要条件.

一

设 X 是赋范线性空间，用 X^* 表示 X 的共轭（对偶）空间，$S_X=\{x\in X;\ \|x\|=1\}$ 表示 X 的单位球面. 在文〔1〕中证明了如下的

引理1 设X是实的赋范线性空间，若X满足：

（1）对每个$x\in X$，存在唯一的$f_x\in X^*$，使得

$$f_x(x)=\|x\|^2,\quad \|f_x\|=\|x\|$$

（2）$f_x(y)\leqslant\|y+\|y\|x\|-\|y\|$，$\forall y\in X$

则X是内积空间，而且内积为$f_x(y)$.

定义1 赋范线性空间 X 称为光滑的，若对每个 $x\in X$，$x\neq 0$，存在唯一的 $\varphi\in X^*$，使 $\|\varphi\|=1$，而且$\varphi(x)=\|x\|$，这个泛函将用φ_x表示之.

显然，引理1中的条件（1）相当于空间X是光滑的，而且此时有$f_x=\|x\|\varphi_x$.若共轭空间X^*是严格凸，则X是光滑的[3]. 又内积空间的共轭空间是Hilbert空间，而Hilbert空间是一致凸，自然是严格凸. 这说明内积空间必定是光滑的，于是引理1中的条件（1）是必要的. 因而可以只讨论光滑的赋范线性空间. 在文〔1〕中证明了满足引理1的条件（1）的泛函 f_x 关于 x 是实齐性，即

引理2 当 α 是实数时，恒有

$$f_{\alpha x}=\alpha f_x,\quad \forall x\in X$$

今用更简单的方法证明于下. 因为

$$(\alpha f_x)(\alpha x)=\alpha^2 f_x(x)=\alpha^2\|x\|^2=\|\alpha x\|^2$$

$$\|\alpha f_x\|=|\alpha|\,\|f_x\|=|\alpha|\,\|x\|=\|\alpha x\|$$

应用条件（1）的假定立刻得到$f_{\alpha x}=\alpha f_x$.

本文1987年2月23日收到.

由引理2，对实光滑的赋范线性空间，要使之成为内积空间，其核心问题是对$\forall x,\ y\in X$，恒有

$$f_x(y)=f_y(x) \tag{2}$$

显然只要考虑当$x,\ y\in S_X$时，式(2)是否成立就可以。下面的定理1就是根据这个想法得到的。

定理1 实的光滑的赋范线性空间X成为内积空间的充分必要条件是对任意的$x,y\in S_X$，有

$$\lim_{n\to\infty}(\|nx+y\|+\|ny-x\|-2n)=0$$

证 充分性．首先证明一个类似于条件(2)的不等式．注意对实光滑的赋范线性空间X，$x,\ y\in X$，则

$$f_{\frac{x}{\|x\|}}(y)=f_{\frac{x}{\|x\|}}\left(\frac{x}{\|x\|}+y\right)-f_{\frac{x}{\|x\|}}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\leqslant\left\|\frac{x}{\|x\|}+y\right\|-\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|^2$$

利用引理2得

$$f_x(y)\leqslant\|x+\|x\|y\|-\|x\|,\quad\forall x,\ y\in X \tag{3}$$

式(3)对实光滑的赋范线性空间总是成立．今利用它来证明本定理的充分性．设$\|x\|=\|y\|=1$，应用式(3)有

$$n\|x\|^2+f_x(y)=f_x(nx+y)\leqslant\|x+\|x\|(nx+y)\|-\|x\|$$

$$n\|y\|^2+f_y(-x)=f_y(ny-x)\leqslant\|y+\|y\|(ny-x)\|-\|y\|$$

移项后，对任意的自然数n，则有

$$\begin{aligned}f_x(y)&\leqslant\|(n+1)x+y\|-(n+1)\\-f_y(x)&\leqslant\|(n+1)y-x\|-(n+1)\end{aligned} \tag{4}$$

于是

$$f_x(y)-f_y(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}(\|(n+1)x+y\|+\|(n+1)y-x\|-2(n+1))=0$$

在式(4)中用$-y$代替y得到

$$-f_x(y)\leqslant\|(n+1)x-y\|-(n+1)$$

$$f_y(x)\leqslant\|(n+1)y+x\|-(n+1)$$

$$f_y(x)-f_x(y)\leqslant\lim_{n\to\infty}[\|(n+1)y+x\|+\|(n+1)x-y\|-2(n+1)]=0$$

最后得到$f_y(x)=f_x(y)$，于是充分性得证．

必要性．设X是实内积空间，$x,\ y\in S_X$，则

$$\|nx+y\|+\|ny-x\|-2n=\frac{(\|nx+y\|+\|ny-x\|)^2-4n^2}{\|nx+y\|+\|ny-x\|+2n}$$

今计算上式的分子

$$\begin{aligned}(\|nx+y\|+\|ny-x\|)^2-4n^2&=(nx+y,\ nx+y)+(ny-x,\ ny-x)\\&\quad+2\|nx+y\|\,\|ny-x\|-4n^2\\&=2(n^2+1)-4n^2+2[((n^2+1+2n(x,\ y))(n^2+1-2n(x,\ y))]^{1/2}\\&=2(1-n^2)+2[(n^2+1)^2-4n^2(x,\ y)^2]^{1/2}\end{aligned}$$

但是

$$n^2-1=[(n^2+1)^2-4n^2]^{1/2}\leqslant[(n^2+1)^2-4n^2(x,\ y)^2]^{1/2}\leqslant n^2+1$$

故

$$0\leqslant \|nx+y\|+\|ny-x\|-2n\leqslant\frac{4}{\|nx+y\|+\|ny-x\|+2n}$$

必要性得证，定理证毕。

在任何赋范线性空间，下面的二个极限都存在[2]

$$G_x^+(h)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t},\qquad G_x^-(h)=\lim_{t\to 0^-}\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t}$$

定义2　赋范线性空间 X 的范数称为 Gâteaux 可微，若对于所有$0\neq x\in X$及$\forall h\in X$，而 t 为任意实数时，下面的极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t}$$

都存在，把此极限记为 $G_x(h)$[2]。显然有

赋范线性空间X的范数是 Gâteaux 可微$\Leftarrow\Rightarrow$对$\forall x,\ h\in X$，有

$$G_x^+(h)=G_x^-(h)$$

此外，还有如文下〔2〕的结论：

赋范线性空间 X 是光滑$\Leftarrow\Rightarrow$它的范数是 Gâteaux 可微。

考察定理 1 的条件，首先有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|x+\frac{1}{n}y\|-\|x\|}{\frac{1}{n}}=G_x^+(y)=G_x(y),\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\|y-\frac{1}{n}x\|-\|n\|}{\frac{1}{n}}=-G_y(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\|nx+y\|+\|ny-x\|-2n)=G_x(y)-G_y(x)$$

因而定理 1 是如下定理1′的变形：

定理1′　设X是实光滑的赋范线性空间，则X是内积空间$\Leftarrow\Rightarrow$对$\forall x,\ y\in X$，有$G_x(y)=G_y(x)$。

现在应用引理 2 及定理1′也可给出引理 1 的另一个证明方法。对$\|x\|=\|y\|=1$，利用式(3)得

$$(n-1)f_x(x)+f_x(y)=f_x((n-1)x+y)\leqslant\|x+\|x\|((n-1)x+y)\|-\|x\|$$

即

$$f_x(y)\leqslant\|nx+y\|-\|nx\|$$

$$f_x(y)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\|x+\frac{1}{n}y\|-\|x\|}{\frac{1}{n}}=G_x(y)$$

从引理 1 中的条件(2)，对$\forall x,\ y\in S_X$，有

$$-\frac{1}{n}f_y(x)=f_{-\frac{1}{n}y}(x)\leqslant\|x+\|x\|(-\frac{1}{n}y)\|-\|x\|$$

故得

$$-f_y(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\|x-\frac{1}{n}y\|-\|x\|}{\frac{1}{n}}=-G_x(y)=-G_x(y)$$

因而对$\forall x$，$y\in S_x$，恒有

$$f_x(y)-f_y(x)\leqslant G_x(y)-G_x(y)=0$$

由此不难得到$f_x(y)=f_y(x)$。引理1证完。

二

仍设X是实光滑的赋范线性空间，为得到另外一些使X成为内积空间的充要条件，采用前面的记号，按引理2，对应$x\to f_x$是实齐性。若此对应是可加的，即

$$f_{x+y}=f_x+f_y,\quad \forall x,\ y\in X \tag{5}$$

则有

$$\|x+y\|^2=f_{x+y}(x+y)=f_x(x+y)+f_y(x+y)=\|x\|^2+f_x(y)+f_y(x)+\|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2=f_{x-y}(x-y)=f_x(x-y)-f_y(x-y)=\|x\|^2-f_x(y)-f_y(x)+\|y\|^2$$

把上面二式相加，就得到X的范数满足平行四边形法则：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\qquad \forall x,\ y\in X.$$

因而式(5)也是使实光滑的赋范线性空间成为内积空间的充分必要条件。但式(5)等价于下面两式同时成立：

$$(f_x+f_y)(x+y)=\|x+y\|^2,\qquad \|f_x+f_y\|=\|x+y\|,\qquad \forall x,\ y\in X \tag{6}$$

下面的定理指出条件(6)可被减弱。

定理2 设X是实的光滑的赋范线性空间，则X成为内积空间的充要条件是

$$\|f_x+f_y\|\leqslant\|x+y\|,\qquad \forall x,\ y\in X$$

证 必要性是显然的。现证充分性，设x，$y\in X$，则

$$(f_x+f_y)(x+y)\leqslant|(f_x+f_y)(x+y)|\leqslant\|x+y\|^2 \tag{7}$$

以$(-y)$代替式(7)中的y，又得到

$$\|x-y\|^2\geqslant(f_x-f_y)(x-y)=\|x\|^2-f_x(y)-f_y(x)+\|y\|^2 \tag{8}$$

式(7)可写成

$$\|x+y\|^2\geqslant\|x\|^2+\|y\|^2+f_x(y)+f_y(x) \tag{9}$$

把式(8)与式(9)相加，得

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\geqslant2(\|x\|^2+\|y\|^2)\qquad \forall x,\ y\in X \tag{10}$$

由于x，y是任意的，在式(10)中用$(x+y)$代x，用$(x-y)$代y，又得到

$$2(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)\leqslant\|(x+y)+(x-y)\|^2+\|(x+y)-(x-y)\|^2$$

$$=4\|x\|^2+4\|y\|^2,\qquad \forall x,\ y\in X \tag{11}$$

联合式(10)、(11)可得到平行四边形法则

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\qquad \forall x,\ y\in X \tag{12}$$

故X是内积空间，定理得证。

从上面的证明过程，顺便看到了式(10)、(11)是等价于式(12)，即等号可用一单向不等号代替之。

同理可证下面的

推论2　设X是光滑的赋范线性空间，则X是内积空间的充要条件是

$$(f_x+f_y)(x+y)=\|x+y\|^2,\qquad \forall x,\ y\in X$$

所可注意的是当空间X为复的情况也成立。

三

讨论与文〔1〕中定理1类似的几个表达内积空间特征的恒等式。先设X是内积空间，x，y，$z\in X$，则

$$\begin{aligned}
&\|x+y+z\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+2Re(x,\ y)+2Re(x,\ z)+2Re(y,\ z)\\
&=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+\tfrac{1}{2}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|-\|y-z\|^2]\\
&=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+\tfrac{1}{2}[2\|x\|^2+2\|y\|^2-2\|x-y\|^2+2\|x\|^2+2\|z\|^2-2\|x-z\|^2\\
&\qquad+2\|y\|^2+2\|z\|^2-2\|y-z\|^2]\\
&=3(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2)-(\|x-y\|^2+\|x-z\|^2+\|y-z\|^2)
\end{aligned}\tag{13}$$

反之，若X是赋范线性空间，其范数满足式(13)，在(13)中令$z=0$，立得

$$\|x+y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)-\|x-y\|^2$$

可见式(13)也表征了赋范线性空间成为内积空间的充要条件。还有类似式(13)的公式，这里不一一写出。

在文〔1〕中指出：若X是赋范线性空间，且对任意的x，y，$z\in X$，有

$$\|x+y+z\|^2=\|x+y\|^2+\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2)\tag{14}$$

则X是内积空间，而且式(14)表征了内积空间的特性。

今把式(14)推广至含有多个元素的情况。先设X是内积空间，$x_i\in X$，$i=1,2,3,4$。

$$\begin{aligned}
&\|x_1+x_2+x_3+x_4\|^2=(x_1+x_2+x_3+x_4,\ x_1+x_2+x_3+x_4)\\
&=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2+\|x_4\|^2+2Re[(x_1,\ x_2)+(x_1,\ x_3)\\
&\qquad+(x_1,\ x_4)+(x_2,\ x_3)+(x_2,\ x_4)+(x_3,\ x_4)]\\
&=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2+\|x_4\|^2+\|x_1+x_2\|^2+\|x_1+x_3\|^2+\|x_1+x_4\|^2\\
&\qquad+\|x_2+x_3\|^2+\|x_2+x_4\|^2+\|x_3+x_4\|^2-3(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x\|^2+\|x_4\|^2)\\
&=\sum_{\substack{i,\ j=1\\ i\neq j}}^{4}\frac{1}{2}\|x_i+x_j\|-2\sum_{i=1}^{4}\|x_i\|^2
\end{aligned}\tag{15}$$

可见式(15)也表征了赋范线性空间成为内积空间的条件。

一般地，若X是内积空间，则对任意的自然数n及任意的$x_i\in X$，$i=1,2,\cdots,n$，总有

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}x_i\Big\|^2=\sum_{\substack{i,\ j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{2}\|x_i+x_j\|^2-(n-2)\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\tag{16}$$

而且式(16)也表征了赋范线性空间成为内积空间的条件，当$n=3$时，式(16)化为式(14)。

四

从文〔1〕中的推论1得到如下的结论：

设X是实的Hilbert空间，则其上的内积满足

$$-\|y-\|y\|x\|+\|y\|\leqslant(x,\ y)\leqslant\|y+\|y\|x\|-\|y\|,\quad \forall x,\ y\in X \tag{17}$$

设$y\neq0$，用$\|y\|$除右半不等式，並记$z=y/\|y\|$，则式(17)的右半不等式等价于下式

$$(x,\ z)\leqslant\|x+z\|-1,\qquad \forall x,\ z\in X,\ \|z\|=1 \tag{18}$$

事实上，式(18)式也可容易按下面办法证之。

令M为由z所产生的一维线性子空间，则$\forall x\in X$可唯一表示成$x=x_1+x_2$，其中$x_1\in M$，$x_2\in M^{\perp}$且可设$x_1=\alpha z$，α是实数。则

$$(x,\ z)=(x_1,z)+(x_2,\ z)=(\alpha z,\ z)=\alpha$$

$$\|x+z\|^2=\|x_1+z+x_2\|^2=\|x_1+z\|^2+\|x_2\|^2\geqslant\|x_1+z\|^2=|1+\alpha|^2$$

于是得到了

$$1+(x,\ z)\leqslant|1+(x,\ z)|\leqslant\|x+z\|,\quad \forall x,\ z\in X,\ \|z\|=1$$

以上的证法也可看出式(17)的右半不等号何时呈等号。同理可证式(17)的左半不等式。自然式(17)的右半不等号利用前面的式(3)是马上可得证，这是因为$(x,\ y)=(y,\ x)$。还可注意到一点，不等式(17)对不完备的内积空间也成立。此外，不等式(17)的右半不等号可以改写成对称的不等式

$$(x,\ y)\leqslant\|\|x\|y+\|y\|x\|-\|x\|\|y\leqslant\|x\|\|y\| \tag{19}$$

这只要用$x/\|x\|$代替式(17)中的x就可以。

在实内积空间，由式(19)可得到比三角不等式稍强的不等式

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,\ y)\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\|y\|+2\|\|x\|y+\|y\|x\|$$

$$=(\|x\|-\|y\|)^2+2\|\|x\|y+\|y\|x\|$$

从式(17)也可得到类似的不等式

$$\|x+y\|^2=(x,\ x+y)+y,\ x+y)\leqslant\|x+y+\|x+y\|x\|-\|x+y\|+\|x+y+\|x+y\|y\|-\|x+y\|$$

$$=\|x+y\|(\|\frac{x+y}{\|x+y\|}+x\|-1)+\|x+y\|(\|\frac{x+y}{\|x+y\|}+y\|-1)$$

故

$$\|x+y\|\leqslant\|\frac{x+y}{\|x+y\|}+x\|+\|\frac{x+y}{\|x+y\|}+y\|-2$$

还可给出类似的不等式，这不须再述。

参 考 文 献

〔1〕张上泰，内积空间的一些特征，华侨大学学报(自然科学报)，(1987)。

〔2〕Beauzamy, B., Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, North-Holland, (1982).

〔3〕Limaye, B.V.: Functional Analysis, Wiley Eastern Limited, (1981).

Characterization of Inner Product Space

Chen Zuli

Abstract

As a continuation of paper [1], this paper deals with the conditons by which normed liner space becomes inner product space.

Several necessay and sufficient conditions by which a smooth normed linear space becomes inner product space are obtained.