

# 热特性参数可变时环形肋片传热的 最优化研究(Ⅱ)\*

## 不变插值原理及其应用

杨 翔 翔

(化工与生化工程系)

### 摘 要

当研究热特性参数可变环形肋片传热的最优化问题时,由于其控制微分方程式是属于非线性的两点边值问题,很难应用理论分析方法来求解,因此,如何求解这类问题便成为研究的关键,不变插值原理正是求解这类问题的最方便的有力工具,本文对不变插值原理作了较详细的介绍和推导,并且给出相应的计算机程序框图。

### 一、不变插值原理及其应用

Ambarzumian 在研究传输现象时第一个提出不变性概念(The concept of invariance), 並应用它将一个边值问题转化为一个初值问题。Chandrasekhar 扩展这个概念到求解辐射换热问题, 並命名为“不变性原理”。近几年来, Bellman、Kalaba、Wing、Lee 等学者相继对这个概念进行了广泛的研究, 并且给出目前这个名称: 不变插值原理。(The Principle of Invariant Imbedding)<sup>[1-4]</sup>。

这个原理已被广泛应用在物理学和工程学科上, 主要用来处理边值问题。前已讨论了当求解非线性边值问题时所遇到的困难<sup>[5]</sup>。同样, 在研究环形肋片传热最优化问题时, 其控制微分方程式也是非线性的边值问题。不变插值原理正是求解这类问题的最方便的有力工具。为了具体说明不变插值原理, 考虑如下的非线性两点边值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t) \quad (1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, t) \quad (1b)$$

边值条件是

$$x(0) = c \quad (2a)$$

本文1986年11月27日收到。

\* 本文第(Ⅰ)部分和续篇第(Ⅲ)部分分别见本学报1987年第3期和1988年第1期。

$$y(t_f) = 0 \quad (2b)$$

独立变数 $t$ 的变化范围是 $0 \leq t \leq t_f$ 。为了避免求解上的困难,可将边值问题转化为初值问题。也就是说,将通过应用不变插值原理去获得未知的另外一个初始条件 $y(0)$ 。为此,首先将这个问题转化为更普遍的边值问题

$$x(a) = c \quad (3a)$$

$$y(t_f) = 0 \quad (3b)$$

式中, $a \leq t \leq t_f$ 。 $a$ 是独立变数 $t$ 的开始值,通过改变 $a$ 值,可以达到改变过程的区间。同样, $c$ 代表过程的初始状态,假设 $a$ 具有从0到 $t_f$ 的一连串不同数值,譬如说 $a = 0, \Delta, 2\Delta, \dots, t_f$ ,此处 $\Delta$ 是一个增量,这样将形成一族相类似的问题,每一个问题都具有不同的开始值 $a$ ,并且用方程式(1)和(3)表示。为了将上述问题转化成一个初值问题,需要求取这族问题的未知初始条件 $y(a)$ ,其基本思想是:在这族问题内相邻过程都是彼此相关的,所谓相邻过程是指区间变化只有微小的增量 $\Delta$ 。因此,通过考察相邻过程之间的关系,便有可能获得未知的初始条件 $y(a)$ 。

不变插值最重要的一点是:对于一族问题来说,未知的初始条件 $y(a)$ 不仅是过程开始值 $a$ 的函数,而且也是过程的初始状态 $c$ 的函数。因此未知的初始条件 $r_m$ 可以定义如下

$$r_m = r_m(c, a) \quad (4a)$$

$r_m$ 表示由方程式(1)和(3)所代表的过程的未知初始条件,此时过程从 $t = a$ 处开始, $a \leq t \leq t_f$ 。而且 $x(a) = c$ 。显然

$$y(a) = r_m(c, a) \quad (4b)$$

注意, $x(a)$ 和 $y(a)$ 代表特定过程的初始条件。

我们将认定 $r_m$ 为因变量,而 $c$ 和 $a$ 是自变量。借助 $c$ 和 $a$ 表示的 $r_m$ 的表达式可用如下方式求解。试考虑具有开始点 $(a + \Delta)$ 的某一相邻过程,对于这一过程的未知初始条件可以被关联到上一邻近过程的初始值 $y(a)$ 上,应用泰勒级数展开,忽略高阶项后可得如下表达式

$$y(a + \Delta) = y(a) + y'(a)\Delta + 0(\Delta) \quad (5)$$

式中, $0(\Delta)$ 代表高阶项。

当过程的开始点 $t = a$ 时,重写方程式(1)可得

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=a} = f(x(a), y(a), a) \quad (6a)$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=a} = g(x(a), y(a), a) \quad (6b)$$

前已知道 $x(a) = c$ 和 $y(a) = r_m(c, a)$ ,如果将这些数值代入式(6)可得

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=a} = f(c, r_m(c, a), a) \quad (7a)$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=a} = g(c, r_m(c, a), a) \quad (7b)$$

将式(7b)和(4b)代入式(5),可得如下未知初始条件 $y(a + \Delta)$ 的表达式,此时过程具有开始状态 $t = a + \Delta$

$$y(a + \Delta) = r_m(c, a) + g(c, r_m(c, a), a)\Delta + 0(\Delta) \quad (8)$$

重写式(4a)

$$r_m = r_m(c, a) = r_m(x(a), a) \quad (9)$$

另一方面, 在式(9)中可用 $(a + \Delta)$ 代替 $a$ , 由此可得未知的初始条件 $y(a + \Delta)$ 的表达式

$$y(a + \Delta) = r_m(x(a + \Delta), a + \Delta) \quad (10)$$

再次需要利用它的相邻过程 $x(a) = c$ 来表示 $x(a + \Delta)$ , 应用泰勒级数展开并忽略高阶项后可得

$$x(a + \Delta) = x(a) + x'(a)\Delta + 0(\Delta) \quad (11)$$

将式(7a)代入式(11)可得

$$x(a + \Delta) = c + f(c, r_m(c, a), a)\Delta + 0(\Delta) \quad (12)$$

再将式(12)代入式(10)得

$$y(a + \Delta) = r_m[c + f(c, r_m(c, a), a)\Delta + 0(\Delta), a + \Delta] \quad (13)$$

由式(8)和(13), 得到所要求的关系式

$$r_m(c, a) + g(c, r_m(c, a), a)\Delta = r_m[c + f(c, r_m(c, a), a)\Delta, a + \Delta] \quad (14)$$

注意在方程式(14)中, 省略了所有高阶项, 式(14)控制了整个不变插值过程, 它可直接被用来求解未知的初始条件 $r_m(c, a)$ 。现应用泰勒级数对方程式(14)的右边项加以展开可得

$$r_m[c + f(c, r_m(c, a), a)\Delta, a + \Delta] = r_m(c, a) + f(c, r_m(c, a), a)\Delta\left(\frac{\partial r_m(c, a)}{\partial c}\right) + \Delta\left(\frac{\partial r_m(c, a)}{\partial a}\right) + 0(\Delta) \quad (15)$$

当 $\Delta$ 趋近于零的极限情况时, 邻近过程便从一个逼近另一个, 下列一阶准线性化偏微分方程式可从式(14)和(15)得到

$$f(c, r_m(c, a), a)\frac{\partial r_m(c, a)}{\partial c} + \frac{\partial r_m(c, a)}{\partial a} = g(c, r_m(c, a), a) \quad (16)$$

由方程式(3b)和(4)可知, 当 $a = t_f$ 时, 则有一个零区间过程

$$r_m(c, t_f) = 0 \quad (17)$$

于是, 对于自变量的初始数值自零变化到 $t_f$ 的一族问题来说, 其未知的初始条件可以通过求解方程式(16)和(17)来获得。当然, 式(16)和(17)可以采用各种方法来求解, 但是比较方便和经常应用的方法是有限差分法。

原始差分方程式(14)保持着过程的物理特征, 因而在研究时更有助于对问题的透彻了解。在式(14)中, 目的是去求得 $r_m(c, a)$ 。因此可以重写式(14)为

$$r_m(c, a) = r_m[c + f(c, r_m(c, a), a)\Delta, a + \Delta] - g(c, r_m(c, a), a)\Delta \quad (18)$$

由式(18)可见,  $r_m(c, a)$ 出现在方程式的两边, 由于只考虑相邻的过程, 因此可用下列近似式来替代式(18)右边项中函数 $f$ 和 $g$ 项内的 $r_m(c, a)$ , 即

$$r_m(c, a) \cong r_m(c, a + \Delta) \quad (19)$$

式中 $\Delta$ 一定要非常小, 将式(19)代入式(18)可得

$$r_m(c, a) = r_m[c + f(c, r_m(c, a + \Delta), a)\Delta, a + \Delta] - g(c, r_m(c, a + \Delta), a)\Delta \quad (20)$$

方程式(20)可借助式(17)的条件从 $t_f$ 处开始采用向后递归的方式来求解。显然无法求解在所有 $c$ 数值上的 $r_m$ 值, 而必须选择 $c$ 的某些离散数值, 例如

$$c = 0, \delta, 2\delta, \dots \quad (21)$$

而 $r_m$ 仅对这些 $c$ 的离散值求解。因此在初始状态 $c$ 和 $t_f$ 二维之间必定有许多网点, 过程的初



优化的计算中。但不变插值原理比起准线性化技术具有下列三个显著的优点。

首先,对于最优化传热问题,不变插值原理比起准线性化技术需要更少的计算时间,这是因为准线性化技术包含一个积分计算过程,同时,其迭代过程要一直进行到收敛被达到为止。

其次,不变插值原理在数值计算中比起准线性化技术更加稳定。这是因为准线性化技术涉及到数值积分问题,在选择近似的初始条件时必须十分谨慎,即便是有一个微小的误差都可能导致整个结果的错误。

最后,不变插值原理能够自动满足数学奇异性的求,这种数学奇异性出现在类似三角形截面环肋的尖端上。如果应用不变插值原理以向后递归的方式进行计算,即便是对于三角形截面肋片来说,也不会出现数学奇异性的问题。

因此,不变插值原理业已有效地用来求解热特性参数可变时环形肋片传热的最优化问题,并且只要对计算机程序稍加修改,它也可用来求解其它类似的最优化问题。

### 参 考 文 献

- [1] Na, T. Y., Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems, Academic Press, (1979).
- [2] Netrakanti, M. N., Study of Heat Transfer in Circular Fins with Variable Thermal Parameters, A Master's Thesis, K.S.U. Manhattan, Kansas, (1983).
- [3] Lee, E.S., Quasilinearization and Invariant Imbedding, With Applications to Chemical Engineering and Adaptive Control, Academic Press, (1968).
- [4] Bellman, R. and Wing, G.M., An Introduction to Invariant Imbedding, John Wiley & Sons, (1975).
- [5] 杨翔翔, 准线性化技术在求解热传导问题中的应用, 华侨大学学报(自然科学版), 82(1987).

## Optimization of Heat Transfer in Circular Fins with Various Thermal Parameters(II)

### Principle of Invariant Imbedding and Its Application

Yang Xiangxiang

#### Abstract

In the study of the optimization of heat transfer in circular fins with various thermal parameters, it is very hard to solve by theoretical analysis, for the governing differential equations are nonlinear two-point boundary value problem.

How to solve this kind of problems is a key point of research, however, the principle of invariant imbedding is advantageous and effective for this purpose.

In this paper, the principle of invariant imbedding is presented and derived in some detail, and the flowchart for invariant imbedding program is also listed.