第8卷 第4期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.8 No.4
JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY
1987年11月　　(NATURAL SCIENCE)　　Nov. 1987

3x+1问题的同高连续正整数

王 志 雄

(应用数学系)

摘　　要

本文证明了 Collatz 3x+1 问题的下列同高定理，给出无限多类型的长分别为3、4和15的同高连续正整数：

(1)　连续正整数C_t-1，C_t-2，C_t-3有相同的高，其中$C_t=2^{66t+46}m+2^{66t+32}$；

(2)　连续正整数d_t-1，d_t-2，d_t-3和d_t-4有相同的高，其中$d_t=2^{66t+39}m+3\times 2^{66t+31}$；

(3)　连续正整数f_t+1，f_t+2，…和f_t+15有相同的高，其中$f_t=2^{66t+1}m+2^{66t-6}$。

一、引　　言

设n为正整数，令

$$T(n)=\begin{cases}\dfrac{3n+1}{2}, & \text{当 } n \text{ 是奇数时}\\ \dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数时}\end{cases}$$

$$T^{(0)}(n)=n,\ T^{(k+1)}(n)=T(T^{(k)}(n)),\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

1950年，L. Collatz 提出熟知的 $3x+1$ 猜想：对任何正整数n，存在非负整数k，使

$$T^{(k)}(n)=1 \tag{1}$$

这是一个还没有完全解决的猜想[1]。使式（1）成立的最小正整数k，称为n的高，记为$H(n)$。数值计算表明：存在无限多连续正整数 n，$n+1$，使$H(n)=H(n+1)$。Lynn E. Garner 给出无限多类型的同高连续正整数对，并提出如下的 Garner 猜想：

对任何正整数l，存在正整数n，$n+1$，…，$n+l-1$，使

$$H(n)=H(n+1)=\cdots=H(n+l-1)$$

即存在任意长的同高连续正整数[2]。

本文将给出无限多类型长分别为3、4和15的同高连续正整数。

本文1986年12月9日收到.

二、长为3和4的同高连续正整数

对任何正整数n，定义序列$\{x_i(n)\}$：

$$T^{(i)}(n)\equiv x_i(n)(\mathrm{mod}2),\qquad 0\leqslant x_i(n)\leqslant 1,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

令

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{k-1}x_i(n)(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

引理 1　对任何正整数m，n，k，恒有

$$T^{(k)}(n+2^km)=3^{S_k(n)}m+T^{(k)}(n)\tag{2}$$

证明　当$k=1$时

$$T^{(k)}(n+2^km)=T(n+2m)=\begin{cases}\dfrac{3n+1}{2}+3m, & \text{当}n\text{为奇数时}\\ \dfrac{n}{2}+m, & \text{当}n\text{为偶数时}\end{cases}$$

$$3^{S_k(n)}m+T^{(k)}(n)=3^{x_0(n)}m+T(n)=\begin{cases}3m+\dfrac{3n+1}{2}, & \text{当}n\text{为奇数时}\\ m+\dfrac{n}{2}, & \text{当}n\text{为偶数时}\end{cases}$$

故式(2)成立。

设式(2)当$k\leqslant p(p\geqslant 1)$时，对一切正整数$m$、$n$成立，则当$k=p+1$时

$$\begin{aligned}T^{(p+1)}(n+2^{p+1}m)&=T(T^{(p)}(n+2^p\times 2m))=T(3^{S_p(n)}2m+T^{(p)}(n))\\&=3^{x_0(T^{(p)}(n))}3^{S_p(n)}m+T(T^{(p)}(n))\end{aligned}\tag{3}$$

因为

$$x_0(T^{(p)}(n))\equiv T^{(p)}(n))\equiv x_p(n)(\mathrm{mod}2)$$

$$0\leqslant x_0(T^{(p)}(n))\leqslant 1,\qquad 0\leqslant x_p(n)\leqslant 1$$

故$x_0(T^{(p)}(n))=x_p(n)$，代入式(3)，得式(2)对于$k=p+1$成立。由数学归纳法原理，引理1得证。

引理 2[2]　设$a_i=2^{i+2}+(-1)^i2^{i+1}$，则

$$T^{(i+3)}(a_i-1)=T^{(i+3)}(a_i-2)=\frac{1}{4}[2\times 3^{i+1}+(-1)^i\times 3^{i+1}-1]$$

$$S_{i+3}(a_i-1)=S_{i+3}(a_i-2)=i+1$$

定理 1　设$b_t=2^{64t+32}$，则

$$T^{(64t+40)}(b_t-1)=T^{(64t+40)}(b_t-2)=T^{(64t+40)}(b_t-3)=\frac{1}{2^8}(3^{64t+38}+5^3)$$

证明　由引理2

$$T^{(64t+34)}(b_t-1)=T^{(64t+34)}(b_t-2)=\frac{1}{4}(3^{64t+32}-1)$$

因为

$$\frac{1}{4}(3^{64t+32}-1)\equiv 32(\mathrm{mod}\,64) \tag{4}$$

由此式和T的定义得

$$T^{(64t+39)}(b_t-1)=T^{(64t+39)}(b_t-2)=\frac{1}{2^7}(3^{64t+32}-1)$$

$$T^{(64t+40)}(b_t-1)=T^{(64t+40)}(b_t-2)=\frac{1}{2^8}(3^{64t+33}+5^3)$$

直接计算得.

$$T^{(3)}(b_t-3)=3\times 2^{64t+29}-1=a_{64t+28}-1$$

故由引理2得

$$T^{(64t+34)}(b_t-3)=T^{(64t+31)}(a_{64t+28}-1)=\frac{1}{4}(3^{64t+30}-1)$$

因为

$$\frac{1}{4}(3^{64t+30}-1)\equiv 2(\mathrm{mod}\,4) \tag{5}$$

故

$$T^{(64t+36)}(b_t-3)=\frac{1}{16}(3^{64t+31}+5)$$

因为

$$\frac{1}{16}(3^{64t+31}+5)\equiv 1(\mathrm{mod}\,2) \tag{6}$$

故

$$T^{(64t+37)}(b_t-3)=\frac{1}{32}(3^{64t+32}+31)$$

因为

$$\frac{1}{32}(3^{64t+32}+31)\equiv 1(\mathrm{mod}\,2) \tag{7}$$

故

$$T^{(64t+38)}(b_t-3)=\frac{1}{64}(3^{64t+33}+5^3)$$

因为

$$\frac{1}{64}(3^{64t+33}+5^3)\equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \tag{8}$$

故得

$$T^{(64t+40)}(b_t-3)=\frac{1}{2^8}(3^{64t+33}+5^3)$$

证毕。

定理 2　设 $c_t=2^{64t+40}m+2^{64t+40}$，则

$$T^{(64t+40)}(c_t-1)=T^{(64t+40)}(c_t-2)=T^{(64t+40)}(c_t-3)$$

$$=3^{64t+33}m+\frac{1}{2^8}(3^{64t+33}+5^3)$$

证明　由引理2及式(4)

$$S_{64t+40}(b_t-1)=S_{64t+40}(b_t-2)=64t+32+1=64t+33$$

由引理2及式(5)—(8)。

$$S_{64t+40}(b_t-3)=1+64t+29+1+1+1=64t+33$$

由引理1和定理1得证。

同理可证

定理3　设 $d_t=2^{64t+39}m+3\times2^{64t+31}$，则

$$T^{(64t+39)}(d_t-i)=3^{64t+32}m+\frac{1}{2^8}(3^{64t+33}+5^3),\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

三、长为15的同高连续正整数

引理3　$r\geqslant1$，则

$$T^{(2r)}(2^{2r}m+1)=3^rm+1$$
$$S_{2r}(2^{2r}m+1)=r$$

证明　对 r 行数学归纳法即得。

定理4　设 $e_t=2^{64t-6}$，则对 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 15$ 恒有

$$T^{(64t+1)}(e_t+i)=\frac{1}{2^7}(3^{32t-1}+85)$$
$$S_{64t+1}(e_t+i)=32t-1$$

证明　由引理3

$$T^{(64t-6)}(e_t+1)=3^{32t-3}+1$$
$$S_{64t-6}(e_t+1)=32t-3 \tag{9}$$

因为

$$3^{32t-3}+1\equiv4(\mathrm{mod}8)$$

故

$$x_{64t-5}(e_t+1)=x_{64t-4}(e_t+1)=0,\qquad x_{64t-3}(e_t+1)=1 \tag{10}$$
$$T^{(64t-3)}(e_t+1)=\frac{1}{8}(3^{32t-2}+7)$$

因为

$$\frac{1}{8}(3^{32t-2}+7)\equiv8(\mathrm{mod}16)$$

故

$$x_{64t-2}(e_t+1)=x_{64t-1}(e_t+1)=x_{64t}(e_t+1)=0$$
$$x_{64t+1}(e_t+1)=1 \tag{11}$$
$$T^{(64t+1)}(e_t+1)=\frac{1}{2^7}(3^{32t-1}+85)$$

由式(9)—(11)得

$$S_{64t+1}(e_t+1)=32t-1$$

又因为

$$T^{(4)}(e_t+5)=3\times 2^{64t-10}+1,\ S_4(e_t+5)=1$$

由引理 3

$$T^{(64t-6)}(e_t+5)=T^{(64t-10)}(2^{64t-10}\times 3+1)=3^{32t-4}+1$$

$$S_{64t-6}(e_t+5)=1+32t-5=32t-4 \tag{12}$$

因为

$$3^{32t-4}+1\equiv 2(\mathrm{mod}4)$$

故

$$x_{64t-5}(e_t+5)=0,\qquad x_{64t-4}(e_t+5)=1 \tag{13}$$

$$T^{(64t-4)}(e_t+5)=\frac{1}{4}(3^{32t-3}+5)$$

因为

$$\frac{1}{4}(3^{32t-3}+5)\equiv 2(\mathrm{mod}4)$$

故

$$x_{64t-3}(e_t+5)=0,\qquad x_{64t-2}(e_t+5)=1 \tag{14}$$

$$T^{(64t-2)}(e_t+5)=\frac{1}{16}(3^{32t-2}+23)$$

因为

$$\frac{1}{16}(3^{32t-2}+23)\equiv 1(\mathrm{mod}2)$$

故

$$x_{64t-1}(e_t+5)=1 \tag{15}$$

$$T^{(64t-1)}(e_t+5)=\frac{1}{32}(3^{32t-1}+85)$$

因为

$$\frac{1}{32}(3^{32t-1}+85)\equiv 0(\mathrm{mod}4)$$

故

$$x_{64t}(e_t+5)=x_{64t+1}(e_t+5)=0 \tag{16}$$

$$T^{(64t+1)}(e_t+5)=\frac{1}{2^7}(3^{32t-1}+85)$$

由式(12)—(16)得

$$S_{64t+1}(e_t+5)=32t-1$$

其余等式同理可证。

定理 5 设 $f_t=2^{64t+1}m+2^{64t-6}$，$i=1, 2, 3, \cdots, 15$，则

$$T^{(64t+1)}(f_t+i)=3^{32t-1}m+\frac{1}{2^7}(3^{32t-1}+85)$$

证明 由定理 4 及引理 1 即得。

参　考　文　献

〔1〕Lagarias, C.J., The $3x+1$ Problem and Its Generalizations, The Amer.Math.Monthly, 92 (1985), 3—23.

〔2〕Garner, L.E., On Heights in the Collatz $3n+1$ Problem, Discrete Math.55 (1985), 57—64.

Consecutive Integers with Same Height in Collatz $3x+1$ Problem

Wang Zhixiong

Abstract

This paper demonstrates the following theorems in Collatz $3x+1$ problem, and presents innumerable types of consecutive integers which have the same height and the length of 3, 4 and 15 respectively:

1. The consecutive integers C_t-1, C_t-2, C_t-3 have the same height, where $C_t=2^{64t+40}m+2^{64t+32}$.

2. The consecutive integers d_t-1, d_t-2, d_t-3 and d_t-4 have the same height, where $d_t=2^{64+39}m+3\times 2^{64t+31}$.

3. The consecutive integers f_t+1, f_t+2, …and f_t+15 have the same height, where $f_t=2^{64t+1}m+2^{64t-6}$.