

线性代数方程组的单纯形解法

蔡火萤

(应用数学系)

摘 要

本文提出求解线性代数方程组的单纯形方法,即将所给线性代数方程组转化成为一个非负右端项和非负变量的特殊方程组,进而构造一个规范形式的标准线性规划问题,然后采用单纯形方法求解这个线性规划问题。如果这个线性规划问题的目标函数的最优值为零,则可求出这个线性代数方程组的基础解系,如果这个线性规划问题的目标函数的最优值不是零,则这个线性代数方程组无解。

一、引 言

线性代数方程组的解法大致可分三类:直接法、迭代法、以及介于这两种方法之间的共轭斜量法^[1]。虽然利用消去法求解线性代数方程组是比较稳定的,但如果系数矩阵 A 的条件数越大,所对应的方程组就越病态,由初始资料的误差引起的解的误差就可能越大^[1]。松弛迭代法的优点是存储量小,但选择松弛因子也比较麻烦,共轭斜量法的优点是对矩阵元素结构没有特殊要求;缺点是计算过程对舍入误差比较敏感,其原因是计算公式强烈地依赖于向量组的正交性^[1]。本文提出求解线性代数方程组的单纯形方法^[2],即将所给线性代数方程组转化成为一个非负右端项和非负变量的特殊方程组,进而构造一个规范形式的标准线性规划问题,然后采用单纯形方法求解这个标准线性规划问题,得到一个基础最优解。进而求出这个线性代数方程组的基础解系,或者判断这个线性代数方程组无解。这种方法的优点是形式规范化、易编程序、有限步收敛,是一个有效而可行的算法^[3]。

二、方法的建立

对于所给实系数线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

本文1986年12月30日收到。

总可以引入一组非负变量: y_0, y_1, \dots, y_n , 并设

$$x_i = y_i - y_0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$\begin{cases} \left(-\sum_{j=1}^n a_{1j}\right)y_0 + a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n = b_1 \\ \left(-\sum_{j=1}^n a_{2j}\right)y_0 + a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n = b_2 \\ \vdots \\ \left(-\sum_{j=1}^n a_{mj}\right)y_0 + a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n = b_m \end{cases} \quad (3)$$

如果式(3)中的第 i 个方程的右端项 $b_i < 0$, 则用 (-1) 遍乘该方程两边, 从而得到一个具有非负右端项和非负变量的如下形式的方程组

$$\begin{cases} a_{10}y_0 + a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n = b_1 \\ a_{20}y_0 + a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m0}y_0 + a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n = b_m \end{cases} \quad (4)$$

其中, $b_i \geq 0, y_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n$. 在方程组(4)的基础上再引入一些新的非负变量 z_1, z_2, \dots, z_m , 构造一个标准线性规划问题:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && z_1 + z_2 + \dots + z_m \\ &\text{subject to} && \\ &&& a_{10}y_0 + a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + z_1 = b_1 \\ &&& a_{20}y_0 + a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n + z_2 = b_2 \\ &&& \vdots \\ &&& a_{m0}y_0 + a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n + z_m = b_m \\ &&& b_i \geq 0, z_i \geq 0, y_j \geq 0; i = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

把标准线性规划问题(5)进一步化成规范形式:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && \sum_{i=1}^m b_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}y_j \\ &\text{subject to} && \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^n a_{ij}y_j + z_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$b_i \geq 0, z_i \geq 0, y_j \geq 0; i = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n$$

记

$$\begin{aligned} C_j &= -\sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \\ z_0 &= -\sum_{i=1}^m b_i \\ x &= -z_0 + C_0y_0 + C_1y_1 + \dots + C_ny_n \end{aligned}$$

得到一个规范形式的标准线性规划问题:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && z = -z_0 + c_0 y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \\ & \text{subject to} && \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} y_j + z_i = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$b_i \geq 0, z_i \geq 0, y_j \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

利用单纯形法求解规范形式问题(6), 得到最优解 $(y_0, y_1, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$. 如果目标函数的最优值是零, 则可求出线性代数方程组(1)的基础解系. 如果目标函数的最优值大于零, 则断定线性代数方程组(1)无解. 在证明问题(6)的收敛性之前先看一个例子.

例 给出线性代数方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 14 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

引入非负变量 y_0, y_1, y_2, y_3 , 并设

$$x_i = y_i - y_0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)可得

$$\begin{cases} -5y_0 + 2y_1 - 3y_2 + 6y_3 = 14 \\ -2y_0 + 5y_1 + y_2 - 4y_3 = -5 \\ -y_0 + y_1 + y_2 - y_3 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

用(-1)乘问题(9)的第二个方程, 得到方程组

$$\begin{cases} -5y_0 + 2y_1 - 3y_2 + 6y_3 = 14 \\ 2y_0 - 5y_1 - y_2 + 4y_3 = 5 \\ -y_0 + y_1 + y_2 - y_3 = 0 \end{cases} \quad y_0, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad (10)$$

利用方程组(10)构造标准线性规划问题

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && z_1 + z_2 + z_3 \\ & \text{subject to} && \\ & && -5y_0 + 2y_1 - 3y_2 + 6y_3 + z_1 = 14 \\ & && 2y_0 - 5y_1 - y_2 + 4y_3 + z_2 = 5 \\ & && -y_0 + y_1 + y_2 - y_3 + z_3 = 0 \\ & && y_0, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

再将问题(11)化成规范形式

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && z = 19 + 4y_0 + 2y_1 + 3y_2 - 9y_3 \\ & \text{subject to} && \\ & && -5y_0 + 2y_1 - 3y_2 + 6y_3 + z_1 = 14 \\ & && 2y_0 - 5y_1 - y_2 + 4y_3 + z_2 = 5 \\ & && -y_0 + y_1 + y_2 - y_3 + z_3 = 0 \end{aligned}$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \geq 0 \quad (12)$$

利用单纯形法求解规范形式(12), 其单纯形表格算法如表1所示.

表 1

	y_0	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	
z_1	-5	2	-3	6	1	0	0	14
z_2	2	-5	-1	(4)	0	1	0	5
z_3	-1	1	1	-1	0	0	1	0
	4	2	3	-9	0	0	0	-19
z_1	-8 (19/2)	-3/2	0	1	-3/2	0	13/2	
y_3	1/2	-5/4	-1/4	1	0	1/4	0	5/4
z_3	-1/2	-1/4	3/4	0	0	1/4	1	5/4
	17/2	-37/4	3/4	0	0	9/4	0	-31/4
y_1	-16/19	1	-3/19	0	2/19	-3/19	0	13/19
y_3	-21/38	0	-17/38	1	5/38	1/19	0	40/19
z_3	-27/38	0 (27/38)	0	1/38	4/19	1	27/19	
	27/38	0	-27/38	0	37/38	15/19	0	-27/19
y_1	-1	1	0	0	1/9	-1/9	2/9	1
y_3	-1	0	0	1	4/27	5/27	17/27	3
y_2	-1	0	1	0	1/27	8/27	38/27	2
	0	0	0	0	1	1	1	0

换出基中的基础变量是 $x_{i(r)}$, 这里

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0, 1 \leq i \leq m \right\}$$

其中

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$A \triangleq [A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}] = [a_{ij}]$$

经过换基之后, 下一个单纯形表格中的基础变量为 $x_{i(1)}, \dots, x_{i(r-1)}, x_s, x_{i(r+1)}, \dots, x_{i(m)}$. 今记: $j(1) = i(1), \dots, j(r-1) = i(r-1), j(r) = s, j(r+1) = i(r+1), \dots, j(m) = i(m)$, 得到下一个单纯形表格中的基础变量为: $x_{j(1)}, x_{j(2)}, \dots, x_{j(m)}$. 利用这组基础变量的下标: $j(1), j(2), \dots, j(m)$, 决定一个 $m \times m$ 阶方阵 $B \triangleq [A^{(j(1))}, A^{(j(2))}, \dots, A^{(j(m))}]$ 和一个 m 维向量: $C_B = (c_{j(1)}, c_{j(2)}, \dots, c_{j(m)})$, 进而求出逆矩阵 B^{-1} , 最后计算下一个单纯形表格中的数据: $A^* = B^{-1}A, b^* = B^{-1}b, C^* = C - C_B A^*, z_0^* = z_0 - C_B b^*$. 得到下一个简单表格:

$$\begin{array}{c|c} A^* & b^* \\ \hline C^* & z_0^* \end{array} \quad (14)$$

它的基础变量是 $x_{j(1)}, x_{j(2)}, \dots, x_{j(m)}$. 如果 $C^* \geq 0$, 则已达到最优解, 否则再进行换基.

由此看出标准线性规划问题的最优解为

$$(y_0, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3)$$

$$= (0, 1, 2, 3, 0, 0, 0)$$

目标函数的最优值为零. 所以线性代数方程组(1)的解为 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

三、单纯形表格算法的矩阵形式

为了将单纯形的表格计算公式化, 我们引入单纯形表格计算的矩阵形式. 对于所给的规范形式的标准线性规划问题

Minimize z with

$$Ax = b, C^T x - z_0 = z, x \geq 0$$

把它记成简单格式

$$\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline C & z_0 \end{array} \quad (13)$$

其中相应的基础变量是 $x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(m)}$. 现在进行换基, 换入基中的非基础变量是 x_s , 这里

$$c_s = \min \{c_j \mid c_j < 0, 1 \leq j \leq n\}$$

在换基之前, 先记: $i(1)=j(1), \dots, i(m)=j(m)$. 换入基中的非基础变量是 x_s . 其中

$$C_s^* = \min \{c_j^* | c_j^* < 0, 1 \leq j \leq n\}.$$

换出基中的基础变量是 $x_{i(r)}$, 其中

$$\frac{b_r^*}{a_{rs}^*} = \min \left\{ \frac{b_i^*}{a_{is}^*} \mid a_{is}^* > 0, 1 \leq i \leq m \right\}$$

经过换基之后, 下一个单纯形表格中的基础变量为 $x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots, x_{i(r-1)}, x_s, x_{i(r+1)}, \dots, x_{i(m)}$, 今记: $j(1)=i(1), \dots, j(r-1)=i(r-1), j(r)=s, j(r+1)=i(r+1), \dots, j(m)=i(m)$. 于是得到下一个单纯形表格中的基础变量为 $x_{j(1)}, x_{j(2)}, \dots, x_{j(m)}$. 这样循环往复直至求出最优解.

四、收敛分析 (证明问题 (6) 的收敛性)

定义 1 若在一个线性规划中, 目标函数被求极小值, 约束条件都是等式约束, 变量受到非负限制, 便称为标准线性规划.

定义 2 若一个标准线性规划, 其约束系统中的变量被分成两部分: 一部分叫做非基础变量; 一部分叫做基础变量. 基础变量已被分离. 此外, 约束系统的基础解都是可行的, 而目标函数又不含基础变量, 便称为规范形式的标准线性规划.

定义 3 在规范形式的约束系统中, 令全体非基础变量为零, 便可求出全体基础变量的值, 进而得到约束系统的解, 称为基础解. 如果基础解的全体分量皆非负, 便称为基础可行解.

定义 4 若在基础可行解中, 至少有一个基础变量取值为零, 便称为退化的基础可行解. 否则便称为非退化的基础可行解.

引理 1 一个规范形式的标准线性规划, 若其目标函数的系数皆非负, 则这个规范形式的规划问题的基础可行解就是最优解.

证明 不失一般性, 假设标准线性规划的规范形式为

$$\text{Minimize } z = C_{m+1}x_{m+1} + \dots + C_nx_n - z_0$$

subject to

$$x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1$$

\dots

$$x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m$$

其中

$$C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_n \geq 0 \quad (15)$$

今令 $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$, 可得基础可行解为 $(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$. 相应的目标函数值为 $z = -z_0$. 其次, 假设问题(15)的任何一个可行解为 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 目标函数在这个可行解处的值为 $z = -z_0 + C_{m+1}x_{m+1} + \dots + C_nx_n \geq -z_0$, 所以基础可行解 $(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ 是问题的最优解. 由此看出, 规范形式的标准线性规划问题, 如果有最优解, 这个最优解必然是一个基础可行解.

引理 2 一个规范形式的标准线性规划, 若目标函数的一个系数 $c_s < 0$, 且约束系统中

的系数矩阵 A 的第 s 列的元素皆非正数, 即 $a_{is} \leq 0, 1 \leq i \leq m$. 则这个线性规划的目标函数无下界, 从而此问题无最优解.

证明 不失一般性, 假设这个标准线性规划的规范形式为

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z = c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n - z_0 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,s}x_s + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ & \vdots \\ & x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,s}x_s + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{aligned}$$

其中

$$c_s < 0, a_{is} \leq 0, 1 \leq i \leq m$$

令 $x_{m+1} = \cdots = x_{s-1} = x_{s+1} = \cdots = x_n = 0$, 代入约束系统可得

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1,s}x_s \\ &\vdots \\ x_m &= b_m - a_{m,s}x_s \end{aligned}$$

进而得到这个约束系统的一个可行解的部分集合

$$\begin{aligned} s &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i = b_i - a_{is}x_s, i = 1, 2, \cdots, m, x_s \geq 0, \\ & x_{m+1} = \cdots = x_{s-1} = x_{s+1} = \cdots = x_n = 0\} \end{aligned}$$

在这个可行解的部分集合上, 目标函数无下界, 从而问题没有最优解.

定义 5 称引理 1 和引理 2 中的规范形式为完成的规范形式.

引理 3 从一个标准线性规划的一个规范形式出发, 经过一次单纯形运算迭代必然得到这个标准线性规划的另一规范形式.

证明 不失一般性, 假设标准线性规划的规范形式为

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z \text{ with} \quad & x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,s}x_s + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ & \vdots \\ & x_r + a_{r,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{r,s}x_s + \cdots + a_{r,n}x_n = b_r \\ & \vdots \\ & x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,s}x_s + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \\ & c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_sx_s + \cdots + c_nx_n = z_0 + z \end{aligned}$$

其中主元为 a_{rs} , $c_s = \min \{c_j \mid c_j < 0, m+1 \leq j \leq n\}$

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0, 1 \leq i \leq m \right\}$$

经过一次单纯形运算迭代之后得到

$$\begin{aligned} x_1 & + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + 0 + \cdots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \\ & \vdots \\ & \frac{1}{a_{rs}}x_r + a'_{r,m+1}x_{m+1} + \cdots + x_s + \cdots + a'_{r,n}x_n = b'_r \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$a'_{m,r}x_r + x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + 0 + \cdots + a'_{m,n}x_n = b'_m$$

$$\frac{-c_s}{a_{rs}}x_r + c'_{m+1}x_{m+1} + \cdots + 0 + \cdots + c'_n x_n = z'_0 + z$$

这时,约束系统是规范形式的,其基础变量是

$$x_1, \cdots, x_{r-1}, x_{r+1}, \cdots, x_m, x_s$$

目标函数不含基础变量,最后要证明相应的基础解是可行的,即要证明 $b'_i \geq 0, i=1, 2, \cdots, m$. 事实上,当 $i=r$ 时

$$b'_r = \frac{b_r}{a_{rs}} \geq 0$$

当 $i \neq r$ 时

$$b'_i = b_i - a_{is} \frac{b_r}{a_{rs}}$$

因为

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0, 1 \leq i \leq m \right\}$$

所以

$$\frac{b_r}{a_{rs}} \leq \frac{b_i}{a_{is}} \Rightarrow b_i \geq a_{is} \frac{b_r}{a_{rs}} \Rightarrow b'_i \geq 0$$

推论 一个规范形式的标准线性规划,如果约束系统的右边项皆为正数,则经过一次单纯形迭代之后,目标函数值严格下降。

证明 由引理3知

$$z'_0 = z_0 - c_s \frac{b_r}{a_{rs}}$$

因为

$$c_s < 0, b_r > 0, a_{rs} > 0$$

所以

$$-z'_0 < -z_0$$

即目标函数值严格下降。

定理1 若一个标准线性规划,它的全体基础可行解都是非退化的,则从它的任一规范形式出发,必存在一个有限步单纯形迭代序列,把它引到一个完成的规范形式。

证明 因为一个标准线性规划问题,只有有限个基础可行解,由题设知,这些基础可行解皆非退化,并且每迭代一次从一个基础可行解进入另一个基础可行解,而且不会重复出现,因此迭代有限次必然达到一个完成的规范形式。

引理4 一个规范形式的标准线性规划,如果约束系统的右端项至少一个大于零,则经过一次单纯形迭代所得到的规范形式,其约束系统的右端项也至少一个大于零。

证明 (易证)。

引理5 一个规范形式的标准线性规划,其约束系统的右端项至少一个大于零,且存在一个有限步单纯形运算序列把它引到一个完成的规范形式,则把全体非零右端项都用零代替之后所得到的新规范形式,采用同一运算序列也能把它引到一个完成的规范形式。

证明 (易证)。

定理 2 一个规范形式的标准线性规划, 若其约束系统的右端项至少一个大于零, 则存在一个单纯形有限步迭代序列把它引到一个完成的规范形式。

证明 今对约束方程的个数 m 作归纳证明, 当 $m = 1$ 时, 只含一个约束方程, 这个约束方程的右边项 $b_1 > 0$, 由引理 4 知, 每作一次迭代, 它的右边项都大于零。由定理 1 知, 存在一个有限步单纯形运算迭代序列, 把它引到一个完成的规范形式。事实上, 若 $b_1 = 0$, 则先用一个正数代替 b_1 , 然后应用定理 1, 可知存在一个有限步单纯形迭代序列把它引到一个完成的规范形式。由引理 5 知, 再用零代替这个正数, 采用同一单纯形迭代序列, 同样把它引到一个完成的规范形式, 即 $m = 1$ 时, 无论 b_1 是否为零命题都成立。今归纳假设对于约束方程的个数小于 m 时, 命题成立。今考虑约束方程的个数 m 的情况, 因为这些约束方程的右端项至少有一个大于零, 我们重新安排约束方程的次序, 把右端项为零的方程排在前面, 把右端项大于零的约束方程排在后面, 并且假设前面有 $(m-r)$ 个方程, 后面有 r 个方程, $r \geq 1$ 。所以 $(m-r) < m$, 由归纳假设, 以前面 $(m-r)$ 个约束方程为约束系统, 规范形式的标准线性规划问题, 存在一个有限步迭代序列, 把它引到一个完成的规范形式, 然后把后面 r 个约束方程加入到前面的约束系统, 再用同一有限步迭代序列, 得到一个规范形式。可能出现以下几种情况:

(1) $c_j^* \geq 0, 1 \leq j \leq n$, 这时规范形式已经是完成的规范形式。

(2) $c_s^* < 0, a_{is}^* \leq 0, 1 \leq i \leq m$ 。这时这个规范形式也是完成的规范形式。

(3) $c_s^* < 0, a_{is}^* \leq 0, 1 \leq i \leq m-r$

$a_{is}^* > 0, m-r+1 \leq i \leq m$

在这种情况下, 选主元 a_{is}^* , 其中

$$\frac{b_i^*}{a_{is}^*} = \min \left\{ \frac{b_i^*}{a_{is}^*} \mid a_{is}^* > 0, m-r+1 \leq i \leq m \right\}$$

然后作一次单纯形迭代, 因为这个主元所在的右端项大于零, 所以目标函数值严格下降, 标准线性规划进入另一个规范形式。然后重复前面的讨论, 由于全体基础可行解有限, 因此这种工作只要进行有限次, 必然把它引到一个完成的规范形式, 问题证毕。

定理 3 任一标准线性规划问题, 只要它有一个规范形式, 都存在一个有限步单纯形迭代序列把它引到一个完成的规范形式。

证明 若这个规范形式的约束系统的右端项至少有一个大于零, 则由定理 2 知命题成立。如果约束系统的右端项皆为零, 则用一个正数代替其中一个右端项, 再由定理 2 知, 可以得到一个有限步迭代序列把它引向一个完成的规范形式, 然后再把这个正数改为零, 采用同一迭代序列仍然把它引到一个完成的规范形式, 命题证毕。

结论 问题 (6) 是一个规范形式的标准线性规划问题, 由定理 3 知, 存在一个有限步单纯形迭代序列把它引向一个完成的规范形式。又知问题 (6) 等价于问题 (5), 而问题 (5) 的目标函数有下界, 即问题 (6) 的目标函数有下界。因此, 存在一个有限步单纯形迭代序列, 把问题 (6) 引到一个最优解。如果目标函数的最优值为零, 则可求出线性方程组 (1) 的基础解系。如果目标函数的最优值大于零, 则断定线性方程组 (1) 无解。

参 考 文 献

- (1) 曹志浩、张玉德、李瑞通, 矩阵计算和方程求根, 人民教育出版社, (1979), 15—72.
- (2) Paul, R.T., An Introduction to Linear Programming and Game Theory, John Wiley and Sons, Inc., (1979), 44—160.
- (3) 魏权龄、王日爽、徐兵、汪家芸、白文林, 数学规划与优化设计, 国防工业出版社, (1984), 180—224.

A Simplex Method for Solving the Linear Equations Set

Cai Huoying

Abstract

This paper presents a simplex method for solving the linear equations set. It means to transform the general linear equations set into a specific equations set with nonnegative variables and nonnegative constant terms, and then to constitute a canonical form linear programming problem which can be solved by simplex method.

If the optimal value of objective function of linear programming problem is zero, it is possible to find a basic solution set of this linear equations set; if it is not zero, there will be no solution to this linear equations set.