

# 热特性参数可变时环形肋片传热的 最优化研究\*(I)

## 不同截面环肋传热的比较

杨 翔 翔

(化工与生化工程系)

### 摘 要

环形肋片被广泛使用在热交换设备上以增强传热,因此有必要对肋片传热的最优化进行研究,它可以分成两类:在给定的传热量下确定最小的肋片体积;或者是在一定的体积下确定肋片的最大传热量.本文只研究后者情况.首先对热特性参数可变时的环肋进行研究,在相同体积下,分别确定矩形截面、梯形截面、抛物线形截面和双曲线形截面等几种不同截面形状环肋的最大传热量.

### 命 名 法\*\*

- |  |   |
|--|---|
| $a$ —过程的开始数值;  | $b$ —肋片根部的半厚度, $m$ ;                      |
| $B_r$ —无因次参数, $B_r = h_o r_o / k_a$ ;  | $c$ —过程开始点上的一般化边值条件;                      |
| $D_o$ —无因次参数, $D_o = r_o / (r_o - r_b)$ ;  | $D_o$ —无因次参数, $D_o = r_o / (r_o - r_b)$ ; |
| $f, g$ —独立变数 $X_1, X_2$ 和 $\zeta$ 导数的函数;   | $f(R)$ —描写放热系数变化的函数;                      |
| $g(L)$ —参数 $L$ 的函数, $g(L) = \int_0^L \beta \zeta d\zeta$ ;                         | $h$ —放热系数, $W/(m^2K)$ ;                   |
| $h_a$ —平均放热系数, $W/(m^2K)$ ;  | $h_{n_j}$ —无肋片壁的放热系数, $W/(m^2K)$ ;        |
| $H$ —无因次放热系数, $H = h/h_a$ ;  | $k$ —导热系数, $W/(mK)$ ;                     |
| $k_a$ —参考的导热系数, $W/(mK)$ ;   | $K$ — $L$ 和 $m$ 的函数;                      |
| $L$ —无因次肋片长度参数, $L = r_o/r_b$ ;  | $m$ —放热系数变化的指数;                           |
| $N$ —无因次肋片参数, $N = \left[ \frac{h_a (r_o - r_b)^2}{k_a b} \right]^{\frac{1}{2}}$ ; |   |
| $N_1$ —无因次参数, $N_1 = \delta / (r_o - r_b)$ ;                                       | $N_2$ —无因次参数, $N_2 = b / (r_o - r_b)$ ;   |

本文原为英文,已被第十一届加拿大应用力学国际学术会议采用.中文稿1986年11月27日收到.

\*本文是作者在美国堪萨斯州立大学机械工程系黄启伦教授指导下完成.因篇幅较长,分三期发表.

\*\*续篇(II)、(III)均同此命名法.

$N_3$ —无因次参数,  $N_3 = N_1 + (N_2 - N_1)(D_o - D_b - R)$ ;

$N_r$ —热量移走数,  $N_r = q/q_{nr}$ ;  $q$ —通过肋片的传热量,  $W$ ;

$q_{nr}$ —无肋片时的传热量,  $W$ ;

$Q_h$ —从肋片传走的无因次传热量,

$$Q_h = \frac{q}{4\pi r_b^2 h_a T_b} = \frac{-bk_a}{r_b h_a (r_o - r_b)} (1 + \alpha) \frac{dQ}{dR} \Big|_{R=0}$$

$r$ —径向距离,  $m$ ;

$r_b$ —肋片的内半径(根部半径),  $m$ ;

$r_o$ —肋片的外半径(端部半径),  $m$ ;

$r_m$ —未知的初值条件;

$R$ —无因次半径,  $R = (r - r_b)/(r_o - r_b)$ ;

$t$ —肋片的温度,  $K$ ;

$t_b$ —肋片根部的温度,  $K$ ;

$t_\infty$ —周围环境的温度,  $K$ ;

$T$ —肋片的相对温度,  $T = t - t_\infty$ ,  $K$ ;

$T_b$ —肋片根部的相对温度,  $T_b = t_b - t_\infty$ ,  $K$ ;

$T_{nr}$ —无肋片壁面的相对温度,  $K$ ;

$U$ —无因次肋片体积,  $U = (k_a V)/(4\pi r_b^4 h_a)$ ;

$V$ —肋片体积,  $V = 4\pi \int_{r_b}^{r_o} y(r) r dr$ ,  $m^3$ ;

$W$ —与肋片根部厚度有关的无因次参数,  $W = r_b \left( \frac{h_a}{k_a b} \right)^{\frac{1}{2}}$ ;

$X_1$ —独立变数,  $X_1 = \theta$ ;

$X_2$ —独立变数,  $X_2 = (1 + \alpha\theta)\beta\zeta \frac{d\theta}{d\zeta}$ ;

$y(r)$ —肋片的  $y$  坐标厚度,  $m$ ;

$\alpha$ —导热系数变化参数;

$\Delta$ —过程区间的间隔数;

$\delta$ —肋片端部的半厚度,  $m$ ;

$\lambda$ —肋片截面的斜率参数,  $\lambda = \delta/b$ ;

$\theta$ —无因次温度,  $\theta = T/T_b$ ;

$\zeta$ —无因次独立变数,  $\zeta = r/r_b$ ;

$\beta$ —无因次肋片厚度,  $\beta = y(r)/b$ 。

## 一、关于肋片传热的最优化问题

当固体表面和周围流体之间低的传热率而导致总的传热量受限制时, 延伸表面, 如肋片, 往往可用来改善总的传热量。环形肋片已被广泛使用在各种不同的热交换设备上以增强传热量。实际上肋片是用来增大传热面积, 然而总的传热量的增加并不是肋片面积的简单函数。因此, 肋片传热的最优化问题必须加以研究。换言之, 必须确定在一定传热量下最小体积的肋片形状, 或者是在一定肋片体积下的最大传热量的肋片形状, 本文将只研究后一情况。

有关肋片传热的最优化问题已有许多学者进行了研究。1926年, Schmidt<sup>[1]</sup>曾假设最小重量的冷却肋片具有等热流量的横断面, 也就是说沿肋片径向长度上具有线性的温度分布, Schmidt是第一位提出肋片最优化判别准则的学者, 随后, Duffin<sup>[2]</sup>通过理论分析方法证实了Schmidt的直观猜测, 并且把传热最优化问题建立在坚实的数学基础上。1964年, Brown<sup>[3]</sup>推导出一个有关环形肋片传热的最优化尺寸的微分方程式, Cobble<sup>[4]</sup>研究了肋片传热的非线性问题, 把研究工作延伸到肋片传热的最优化问题。

Cobble以长条形肋片同周围环境具有稳定的对换和辐射换热, 研究了肋片的最优化形状问题。1974年, Maday<sup>[5]</sup>应用Pontryagin最小值原理, 获得一维长条形冷却肋片的最小重量, Gücere和Maday<sup>[6]</sup>紧跟Maday的工作, 研究了环形冷却肋片的最小重量; Dhar和Arora<sup>[7]</sup>

阐述了对各种不同类型肋片最优化设计的方法。

Razelos<sup>[8]</sup>已经获得矩形、三角形和抛物线形截面轴向对流肋片在相同内热源条件下最优化问题的解。他提出一种理论分析方法，并且导出确定长条形肋片最优化尺寸的超越方程式。1980年，Razelos和Imre<sup>[9]</sup>已求得在放热系数和导热系数都是可变的条件下，环形梯形截面肋片的最优化尺寸，应用准牛顿算法原理求解非线性微分方程式。众所周知，这类非线性微分方程式的求解是不很稳定的，数值积分技术必须进行得十分谨慎。最近，Netrakanti和Huang<sup>[10]</sup>应用不变插值原理(The Invariant Imbedding Principle)研究了同样的问题，因而在数值积分技术中所固有的不稳定性可以避免。

如上所述，肋片传热的最优化可以分为最小体积的肋片或最大传热量的肋片两类问题。遗憾的是对于最小体积肋片的优化问题，遇到了严重不利的情况，即优化结果所得到的肋片截面形状过于复杂难以加工制造，或者肋片强度不足易损坏。这一类型的最优化只具有理论上的学术意义而不具有多大的实用价值。最大传热量问题则在工程设计上更具有现实意义，我们可以选择某种较简单截面形状的肋片，譬如梯形截面或其它形状的肋片，然后确定最大传热量条件下的最优肋片尺寸。

本文研究了当可变的导热系数随温度作线性变化，以及可变的放热系数随肋片半径作指数变化时，环形肋片传热的最优化。这里将讨论两个问题：首先，确定矩形、梯形、抛物线形和双曲线形截面的环形肋片在相同体积下的最大传热量，并相互比较；其次，确定梯形截面环肋的最优几何尺寸。所考虑的传热模式是导热和对流，忽略了热辐射的影响；由于问题的非线性，不能采用理论分析方法来求解，必须借助数值分析方法，数值动力程序方法(即不变插值原理)已被应用在本研究中，所得结果同文献[9]、[10]的结果作了比较，并改正了文献[9]、[10]中的某些错误。

### 二、几种不同截面环肋传热的比较

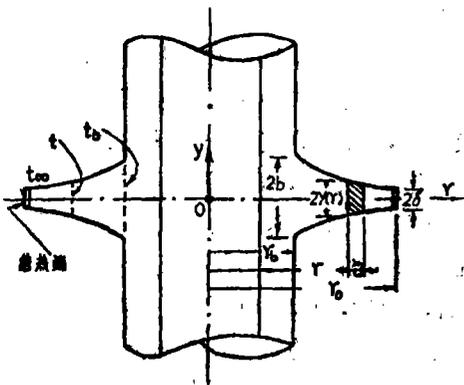


图 1 环形肋片截面示意图

首先考虑一个如图 1 所示的任意截面环肋的传热，其控制非线性微分方程式可表示为<sup>[11]</sup>

$$\frac{d}{dr} \left[ k(T) r y(r) \frac{dT}{dr} \right] - h(r) r T = 0 \quad (1)$$

式中，T是肋片相对温度， $T = t - t_{\infty}$ ，t是肋片的温度， $t_{\infty}$ 是环境温度；k是导热系数；r是肋片的径向坐标；h是放热系数；y是肋片从中部计算的半厚度坐标。这里要注意，肋片的厚度仅是径向坐标的函数。

边界条件是

$$T|_{r=r_0} = \text{常数} = T_b \quad (2a)$$

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \text{当 } y(r_0) = \delta \neq 0 \quad (2b)$$

$$T|_{r=r_0} = 0, \quad \text{当 } y(r_0) = 0 \quad (2c)$$

式中,  $r_i$  是肋片的内半径,  $r_o$  是肋片的外半径,  $T_i$  是肋片根部的相对温度,  $T_b = t_b - t_\infty$ ,  $t_b$  是肋片根部的温度;  $\delta$  是肋片顶端的半厚度。

现在需要确定几种不同截面形状的肋片的最大传热量的数值, 它们是矩形、梯形、三角形、抛物线形和双曲线形截面, 下面分别表述其控制微分方程式。

#### (1) 矩形肋片:

此时

$$y(r) = b = \delta$$

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} = [N^2 f(R)\theta - \alpha \left(\frac{d\theta}{dR}\right)^2 - \frac{(1+\alpha\theta)}{(R+D_b)} \frac{d\theta}{dR}] / (1+\alpha\theta) \quad (3a)$$

式中

$$k(T) = k_a(1+\alpha\theta) \quad (3b)$$

$$h(r) = h_a f(R) \quad (3c)$$

$$N^2 = [h_a(r_o - r_b)^2] / (k_a b) \quad (3d)$$

式中  $\theta$  是无因次温度  $T/T_b$ ;  $R$  是无因次半径,  $R = (r - r_b) / (r_o - r_b)$ ;  $\alpha$  是导热系数变化参数;  $k_a$  是相当于肋片根部温度时的导热系数;  $h_a$  是平均放热系数;  $f(R)$  是描述放热系数变化的函数;  $b$  是肋片根部的半厚度;  $N$  是由式(3d)所定义无因次肋片参数。

#### (2) 梯形肋片:

此时

$$y(r) = \delta + [(b - \delta)(r_o - r)] / (r_o - r_b)$$

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} = N^2 f(R)\theta N_2 / [N_3(1+\alpha\theta)] + [(N_2 - N_1) / N_3 - 1 / (R + D_b)] \frac{d\theta}{dR} - \alpha \left(\frac{d\theta}{dR}\right)^2 / (1+\alpha\theta) \quad (4)$$

式中,  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$  和  $D_b$  是无因次参数, 其定义见上节命名法。

#### (3) 三角形肋片:

此时

$$y(r) = b(r_o - r) / (r_o - r_b)$$

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} = [N^2 f(R)\theta / (D_b - D_o - R) - \alpha \left(\frac{d\theta}{dR}\right)^2] / (1+\alpha\theta) + [1 / (D_b - D_o - R) - 1 / (R + D_b)] \frac{d\theta}{dR} \quad (5)$$

#### (4) 抛物线形肋片:

此时

$$y(r) = (b - \delta) \left(\frac{r_o - r}{r_o - r_b}\right)^2 + \delta$$

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} = \left\{ N^2 f(R)\theta N_2 / [(N_2 - N_1)(D_b - D_o - R)^2 + N_1] - \alpha \left(\frac{d\theta}{dR}\right) \right\} /$$

$$\frac{1}{(1 + \alpha\theta)^2} \left\{ 2(N_2 - N_1)(D_0 - D_i - R) / [(N_2 - N_1)(D_0 - D_i - R)^2 + N_1^2] - 1 / (R + D_0) \right\} \frac{d\theta}{dR} \quad (6)$$

(5) 双曲线形肋片:

此时

$$y(r) = br_0/r$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = [N^2 f(R)\theta(R + D_0) / D_0 - \alpha \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2] / (1 + \alpha\theta) \quad (7)$$

为了比较上述不同截面肋片,哪一种具有最大的传热能力,必须假定某些共同条件.设所有这些肋片都具有:(1)相同的体积;(2)相同的内径和根部厚度;(3)相同的热特性参数  $h_0$  和  $k_a$ .同时假设导热系数的变化参数  $\alpha$  在  $-0.2$  和  $+0.2$  之间变化,放热系数是按照肋片半径的指数关系变化的.选择这些限制条件的根据,可从下文环肋的最优传热尺寸的研究中明显看到.

考虑到肋片的加工制造及其强度,往往采用梯形截面而不是三角形截面肋片,本文将只研究并比较矩形、梯形、抛物线形和双曲线形等四种不同截面形状的肋片.

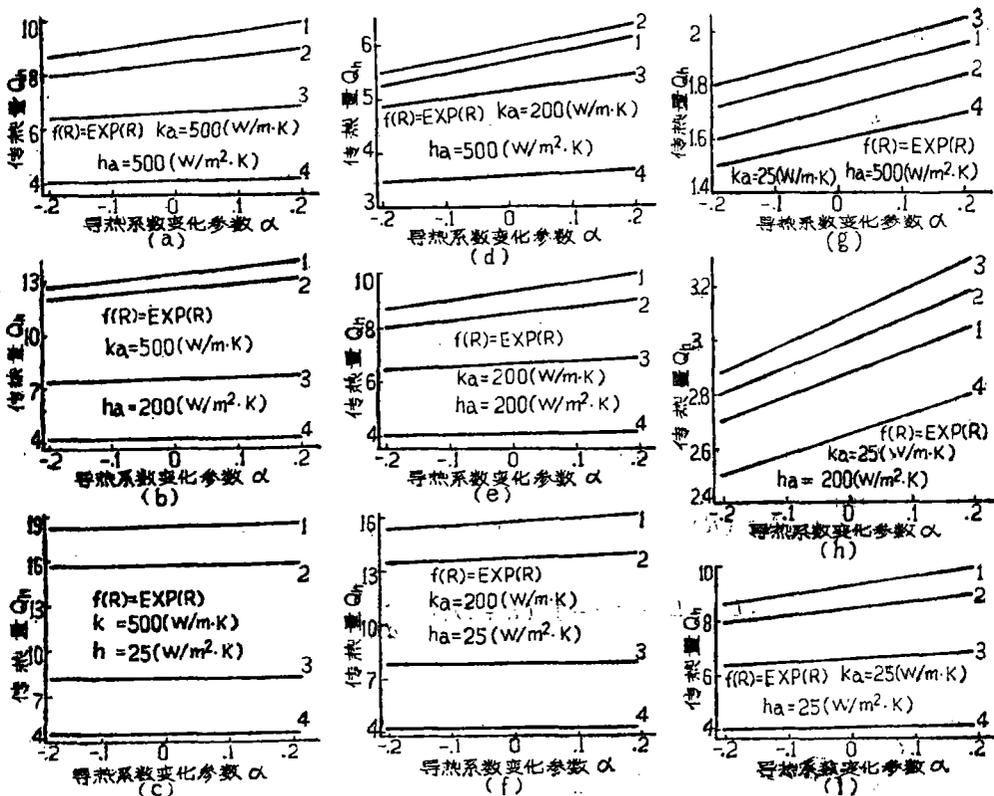


图 2 不同形状肋片传热量的比较  
 1——双曲线形截面; 2——抛物线形截面  
 3——梯形截面; 4——矩形截面  
 (图(c)中  $k$ 、 $h$  的正确符号应为  $k_a$ 、 $h_a$ .)

为了确定从肋片传递出去的热量,可应用下列无因次传热量的关系式

$$\theta_h = \frac{q}{4\pi r_b^2 h_a T_b} = - \frac{bk_a}{r_b h_a (r_0 - r_b)} (1 + \alpha) \left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=1} \quad (8)$$

式中,  $q$  是从肋片传走的热量, 可表示如下

$$q = -4\pi r_b b k(T) \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_b} \quad (9)$$

我们编制了计算机程序进行数值计算, 以便求解各种不同截面形状肋片的温度梯度  $\left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=1}$ 。然后根据式(8)计算肋片的传热量  $Q_h$ , 获得的结果已藉助计算机作图分别画在图2、3上。从这些图上可以清楚地看到, 由于肋片截面形状不同导致其传热量  $Q_h$  也不同。一般说, 由较高导热系数的材料制作的双曲线形和抛物线形截面的肋片具有较高的传热量, 如图2(a)~(f)所示; 但是, 当由较低导热系数材料制作的肋片并承受较高对流换热的环境下, 梯形截面肋片具有最大的传热量, 如图2(g)、(h)所示; 当导热系数和放热系数两者都较低时, 双曲线形和抛物线形截面的肋片仍然具有较高的传热量, 如图2(i)所示。

图3表明放热系数变化参数对肋片传热量的影响, 由图可见, 当放热系数按指数形式变化时, 肋片传热量  $Q_h$  为最大, 而当放热系数按抛物线曲线方程变化时, 其传热量  $Q_h$  为最小。

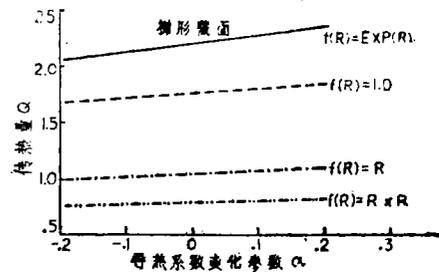


图3 放热系数(参数)变化对传热的的影响

### 参 考 文 献

- (1) Schmidt, W., Die Wärmeübertragung Durch Rippen, Zeitschrift des VDI, 70, 26, 28 (1926), 885, 947.
- (2) Duffin, R.J., A variational problem relating to cooling fins, Journal of Mathematics and Mechanics, 8, 1(1959), 47—56.
- (3) Brown, A., Optimum Dimensions of Uniform Annular Fins, International Journal of Heat and Mass Transfer, 8(1965), 655—662.
- (4) Cobble, M.H., Optimum Fin Shape, Journal of Franklin Institute, 291, 4(1971), 630—639.
- (5) Maday, C.J., The Minimum Weight One-Dimensional Straight Cooling Fin, ASME Journal of Engineering for Industry, 96, 1(1974), 161—165.
- (6) Gjceci, S., Malay, C.J., A Least Weight Circular Cooling Fin, ASME Journal of Engineering for Industry, 97, 1(1975), 1190—1193.
- (7) Dhar, L.P., Arora, P.C., Optimum Design of Finned surfaces, Journal of Franklin Institute, 301, 4(1973), 379—392.
- (8) Razelos, P., The Optimization of Longitudinal Convective Fins with Internal Heat Generation, Nuclear Engineering and Design, 54, 2(1979), 289—299.

- [9] Razelos, P., Imer, K., The Optimum Dimensions of Circular Fins with Variable Thermal Parameters, ASME Journal of Heat Transfer, 102, 3(1980), 420—425.
- [10] Netrakanti, M.N., Huang, C.L.D., Optimization of Annular Fins With Variable Thermal Parameters by Invariant Imbedding, ASME Journal of Heat Transfer, 107, 4(1985), 966—968.
- [11] 杨翔翔, 热特性参数可变时变截面环肋的传热研究, 华侨大学学报, 7, 3(1986).

## Optimization of Heat Transfer in Circular Fins with Variable Thermal Parameters(I)

### Comparison of Heat Transfer in Several Circular Fins

Yang Xiangxiang

#### Abstract

Since circular fins are used widely to facilitate heat transfer in heat exchange devices, the optimization of heat transfer in circular fins is a problem merits attention. It can be considered either as a fin of minimum volume for a given amount of heat dissipation, or as a maximum amount of heat dissipation for a fin of given volume. In this paper the latter is considered.

The circular fins with variable thermal parameters are investigated here. There are several shapes of circular fins which equal in volume and differ in cross section. They are rectangular, trapezoidal, parabolic or hyperbolic in cross section. The maximal amount of heat dissipation is determined for each shape of these circular fins.