

Betti 功互换定理的推广及应用

林建华

(土木工程系)

摘 要

本文把弹性力学的Betti功互换定理推广到弹塑性、粘弹塑性和弹性体运动状态,利用虚位移和虚速度的原理,导出了各种情况下的Betti广义互换方程,并以纯弯曲悬臂梁,压杆稳定和薄板振动问题为例,说明了广义互换定理的应用。

一、引 言

在弹性力学中, Betti 曾证明了下述功的互换定理: 第一组力对第二组力产生的位移所做的功、等于第二组力对第一组力产生的位移所做的功, 即

$$\iiint_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS = \iiint_V f_i^{(2)} u_i^{(1)} dV + \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} u_i^{(1)} dS \quad (1)$$

上式仅适用于弹性静力学状态。为了使 Betti 功互换定理能应用于弹塑性、粘弹性状态以及弹性动力学问题, 本文从虚位移原理和虚速度原理出发, 推广了 Betti 功互换定理, 导出了各种情况下 Betti 广义互换方程, 并以简单的弹塑性、粘弹塑性和弹性振动问题, 说明了 Betti 广义互换定理的应用。

二、Betti 功互换定理的推广

1. 弹塑性 Betti 功互换定理

设弹塑性体在外力作用下处于平衡状态, 其各点位移为 $u_i(x_i)$, 现使弹塑性体内各点发生一虚位移 $\delta u_i(x_i)$, 根据虚位移原理有

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \iiint_V f_i \delta u_i dV + \iint_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = 0 \quad (2a)$$

现设两组力 $(p_i^{(1)}, f_i^{(1)})$, $(p_i^{(2)}, f_i^{(2)})$ 分别作用于同一弹塑性体上, 而各自产生相应的应

本文1986年10月8日收到。

力, 应变及位移 $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)})$, $(\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)})$ 。因此, 对于两种受力状态, 可得虚功方程

$$\iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \delta \varepsilon_{ij}^{(1)} dv - \iiint_V f_i^{(1)} \delta u_i^{(1)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} \delta u_i^{(1)} ds = 0 \quad (2b)$$

$$\iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \delta \varepsilon_{ij}^{(2)} dv - \iiint_V f_i^{(2)} \delta u_i^{(2)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} \delta u_i^{(2)} ds = 0 \quad (2c)$$

对于同一弹塑性体, 真实位移包含于虚位移之中。于是可取

$$\begin{aligned} \delta u_i^{(1)} &= u_i^{(2)}, \quad \delta \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ \delta u_i^{(2)} &= u_i^{(1)}, \quad \delta \varepsilon_{ij}^{(2)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} \end{aligned} \quad (3)$$

又由于小变形, 弹塑性材料的应变分量可表示为弹性应变分量和塑性应变分量之和, 即有

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (4)$$

把式(3)、(4)代入式(2b)、(2c), 移项可得

$$-\iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)e} dv = \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)p} dv - \iiint_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} u_i^{(2)} ds \quad (5a)$$

$$-\iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)e} dv = \iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)p} dv - \iiint_V f_i^{(2)} u_i^{(1)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} u_i^{(1)} ds \quad (5b)$$

因为材料为各向同性

$$\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)e} = \sigma_{ij}^{(1)} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(2)} = \varepsilon_{ij}^{(1)e} \sigma_{ij}^{(2)}$$

所以式(5a)、(5b)两个方程右边项应相等。即有

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)p} dv - \iiint_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} u_i^{(2)} ds \\ &= \iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)p} dv - \iiint_V f_i^{(2)} u_i^{(1)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} u_i^{(1)} ds \end{aligned} \quad (6)$$

上式即是推广的弹塑性 Betti 功互换定理, 在无塑性变形情况下, 方程(6)变成 Betti 方程(1)。

2. 弹性动力问题的 Betti 功互换定理

在弹性动力问题中, 弹性体的位移、应变、应力一般都随时间变化。如果仍采用理想弹性体的假定和微小位移的假定, 那么静力学中所建立的物理方程和几何方程以及应力分量用位移表示的弹性方程都将适用于动力问题中的任一瞬时。然而, 由于弹性体的运动具有加速度而产生惯性力, 因而, 在虚功方程(2)中应计及这些惯性力的影响。根据达朗伯原则, 对于任一瞬时, 弹性动力问题的虚功方程可表示为

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - \iiint_V f_i \delta u_i dv + \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dv - \iint_{S_\sigma} p_i \delta u_i ds = 0 \quad (7)$$

同上面推导一样, 可得到弹性动力问题的 Betti 功互换定理

$$\begin{aligned} & \iiint_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dv - \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2} u_i^{(2)} dv + \iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} u_i^{(2)} ds \\ &= \iiint_V f_i^{(2)} u_i^{(1)} dv - \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2} u_i^{(1)} dv + \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} u_i^{(1)} ds \end{aligned} \quad (8)$$

在动力问题中, 为了避免数学上的困难, 通常都不计体力, 因此, 消去式(8)中体力项可得

$$\iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} u_i^{(2)} ds - \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2} u_i^{(2)} dv = \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} u_i^{(1)} ds - \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2} u_i^{(1)} dv \quad (9)$$

式中, ρ 表示弹性体单位体积中的质量。

3. 粘弹塑性 Betti 功率互换定理

对于粘弹塑性材料, 和虚位移原理相当的有虚速度原理

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \xi_{ij} dv - \iiint_V f_i \delta v_i dv - \iint_{S_\sigma} p_i \delta v_i ds = 0 \quad (10a)$$

式中, v_i 代表速度; δv_i 代表虚速度; ξ_{ij} 代表应变率, $\delta \xi_{ij}$ 代表虚应变率。

今设有两组力 $(p_i^{(1)}, f_i^{(1)})$, $(p_i^{(2)}, f_i^{(2)})$ 分别作用于同一粘弹塑性体上, 而各自产生相应的应力, 应变速率和速度为 $(\sigma_{ij}^{(1)}, \xi_{ij}^{(1)}, v_i^{(1)})$, $(\sigma_{ij}^{(2)}, \xi_{ij}^{(2)}, v_i^{(2)})$ 。因此, 对于两种受力状态, 可得虚功率方程

$$\iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \delta \xi_{ij}^{(1)} dv - \iiint_V f_i^{(1)} \delta v_i^{(1)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} \delta v_i^{(1)} ds = 0 \quad (10b)$$

$$\iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \delta \xi_{ij}^{(2)} dv - \iiint_V f_i^{(2)} \delta v_i^{(2)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} \delta v_i^{(2)} ds = 0 \quad (10c)$$

同样取

$$\begin{aligned} \delta v_i^{(1)} &= v_i^{(2)}, \quad \delta \xi_{ij}^{(1)} = \xi_{ij}^{(2)} \\ \delta v_i^{(2)} &= v_i^{(1)}, \quad \delta \xi_{ij}^{(2)} = \xi_{ij}^{(1)} \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10b)、(10c), 并合并两式可得

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \xi_{ij}^{(2)} dv - \iiint_V f_i^{(1)} v_i^{(2)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} v_i^{(2)} ds \\ &= \iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \xi_{ij}^{(1)} dv - \iiint_V f_i^{(2)} v_i^{(1)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} v_i^{(1)} ds \end{aligned} \quad (12)$$

上式即是推广的粘弹塑性 Betti 功率互换定理。

4. 刚粘塑性 Betti 功率互换定理

在式(12)中, 如果认为 ξ_{ij} 是包含有弹性应变率和非线性应变率的总应变率, 而材料在受力后的变形与运动过程中, 其弹性变形与粘塑性变形相比一般可认为是小量而忽略不计, 此时有

$$\dot{\xi}_{ij} = \dot{\xi}_{ij}^p \quad (13)$$

这里 $\dot{\xi}_{ij}^p$ 代表粘塑性应变率。把式(13)代入式(12)可得到刚粘塑性 Betti 功率互换定理。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \dot{\xi}_{ij}^{(2)p} dv - \iiint_V f_i^{(1)} v_i^{(2)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(1)} v_i^{(2)} ds \\ &= \iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \dot{\xi}_{ij}^{(1)p} dv - \iiint_V f_i^{(2)} v_i^{(1)} dv - \iint_{S_\sigma} p_i^{(2)} v_i^{(1)} ds \end{aligned} \quad (14)$$

以上所导出的各种状态下推广的 Betti 定理, 式(6)、(9)、(12)、(14), 把它们统称为 Betti 广义互换定理。

三、Betti 广义互换定理的应用

1. 梁的弯曲

考虑长度为 l 的悬臂梁纯弯曲情况。分别应用上面所得到的 Betti 广义互换定理求解 弹塑性 极限状态下自由端的挠度及刚粘塑性状态下自由端的挠曲速率。为了方便求解, 假设状态 1 为弹性静力学状态(图 1), 而相应的弹性响应为

$$\text{面力} \quad P^{(1)} = -1$$

$$\text{应力} \quad \sigma_x^{(1)} = \frac{(l-x)y}{I} \quad (15)$$

$$\text{挠度} \quad u^{(1)} = -\frac{x^2(3l-x)}{6EI}$$

$$\text{挠曲速率} \quad v_c^{(1)} = 0$$

$$\text{应变速率} \quad \dot{\xi}_{ij}^{(1)} = 0$$

(1) 悬臂梁在塑性极限均布载荷下自由端挠度:

如图 2 所示, 理想弹塑性材料的悬臂梁受到均布荷载 q_0 作用, 其塑性极限荷载为

$$q^* = \frac{2bh^2\sigma_s}{l^2}$$

而塑性区表达式为

$$h^2_e = 3h^2 \left(\frac{2x}{h} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

于是取状态 2 如图 2 所示, 此时有

$$\text{面力} \quad P^{(2)} = -q^* = -\frac{2bh^2\sigma_s}{l^2}$$

$$\text{塑性应变} \quad \epsilon_x^{(2)p} = \frac{y}{\rho} - \frac{\sigma_s}{E} = \frac{y\sigma_s}{Eh_e} - \frac{\sigma_s}{E} \quad (16)$$

$$\text{自由端挠度} \quad u_c^{(2)} = u_c^p$$

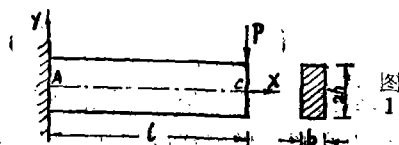


图 1

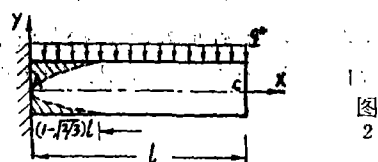


图 2

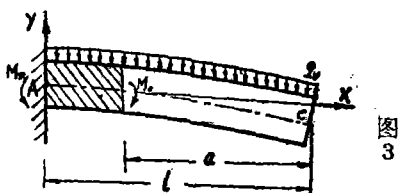


图 3

把两种受力状态的结果式(15)、(16)代入弹塑性功互换方程(6)有

$$u_c^p = u_c^{(2)} = - \iiint_V \varepsilon_x^{(2)p} \sigma_x^{(1)} dV - \iint_{S_\sigma} P^{(2)} u^{(1)} ds$$

$$= -2b \int_0^{(1-\sqrt{2/3})l} \left(\frac{l-x}{I} \right) \int_{h_e}^h \left(\frac{y\sigma_s}{Eh_e} - \frac{\sigma_s}{E} \right) y dy dx - \int_0^l \frac{q^* x^2 (3l-x)}{6EI} dx$$

上式第一个积分中代换 $dx = \frac{h_e l^2 dh_e}{3h^2(l-x)}$ 并积分之可得

$$u_c^p = - \frac{2l^2 b}{3h^2} \int_0^h dh_e \int_{h_e}^h \left(\frac{y\sigma_s}{EI} - \frac{\sigma_s h_e}{EI} \right) y dy - \int_0^l \frac{2bh^2 \sigma_s x^2 (3l-x)}{6EI l^2} dx$$

$$= - \left(\frac{\sigma_s h^2 l^2 b}{12EI} + \frac{\sigma_s h^2 l^2 b}{4EI} \right) = - \frac{\sigma_s h^2 l^2 b}{3EI}$$

负号表示挠曲方向与坐标轴正向相反。

自由端塑性极限挠度和弹性极限挠度之比为

$$\frac{u_c^p}{u_c^e} = \frac{1/3}{1/6} = 2$$

(2) 均布载荷 q_0 作用下刚粘塑性梁自由端挠曲速率

如图3所示刚粘塑性梁, 图中阴影部分为粘塑性区, 在粘塑性区, 材料服从下列本构关系

$$\xi_x^{vp} = D \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} - 1 \right)^n \quad (17)$$

一般认为粘塑性条件下梁的纯弯曲, 平面截面假设仍然适用。由此可得

$$\xi_x^{vp} = ky \quad (18)$$

式中, k 为挠曲轴线曲率变化率。

用广义应力和应变率改写本构关系式(17)可得

$$k = B \left(\frac{M}{M_0} - 1 \right)^n \quad (19)$$

其中

$$\bar{B} = \left(\frac{D}{h} \right) \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n$$

$$M_0 = \sigma_s h^2 b$$

M_0 为截面屈服弯矩值。

因此第二受力状态为

面力 $p^{(2)} = -q_0$

$$\text{粘塑性应变率 } \xi_x^{vp(2)} = B \left(\frac{M}{M_0} - 1 \right)^n \quad y = \bar{B} \left[\frac{(l-x)^2}{a^2} - 1 \right]^n y \quad (20)$$

自由端挠曲速率 $v^{(2)} = v_c$

把两种受力状态的结果式(15)、(20)代入刚粘塑性功率互换定理式(14), 移项可得

$$v_c = v^{(2)} = - \iiint_V \sigma_x^{(1)} \xi_x^{vp(2)} dv = - \int_0^{l-a} \bar{B} (l-x) \left[\frac{(l-x)^2}{a^2} - 1 \right]^n dx$$

$$= -k_0 \frac{(l^2 - a^2)}{2(n+1)}$$

负号表示速率方向与坐标轴正向相反。其中

$$k_0 = B \left(\frac{M_m}{M_0} - 1 \right)^n$$

式中, M_m 固定端 A 处弯矩。

$$a^2 = \frac{2\sigma_s h^2 b}{q_v}$$

式中, a 为刚性区长度。

2. 压杆稳定问题

图 4 所示受轴向压力 p 作用的工字形截面杆。若材料满足稳定徐变规律

$$\xi = B\sigma^m \quad (21)$$

假设由于某种原因(如杆件的初始曲率或者荷载的微小偏心)引起压杆弯曲。应用平面截面假设,可以得到截面两侧应变速率与轴线曲率变化率之间的关系

$$k = \frac{\xi_2 - \xi_1}{h} \quad (22)$$

式中, ξ_2, ξ_1 为截面弯曲后内缘、外缘的徐变应变速率; h 为两翼缘间的距离。

略去腹板面积,并假设内外翼缘的面积相等且等于 $F/2$ 。因而, ξ_2, ξ_1 与 p, u 有以下关系

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \left[-\frac{p}{F\lambda} \left(1 + \frac{2u}{h} \right) \right]^m \\ \xi_2 &= \left[\frac{p}{F\lambda} \left(1 - \frac{2u}{h} \right) \right]^m \end{aligned} \quad (23)$$

式中, u 为截面挠度; $\lambda = B^{-1/m}$ 。

取图 4 所示的受力状态为第二状态。再设第一受力状态如图 5 所示。在杆中部横向作用单位集中力 $p^{(1)} = 1$, 使结构处于弹性状态。此时有

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= \frac{z \cdot h}{4I} = \frac{z}{Fh} \quad (0 \leq z \leq l/2) \\ \xi_z^{(1)} &= 0 \\ \nu^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

根据 Betti 广义互换定理,把式(23)、(24)代入方程

(12)有

$$\iiint_V \alpha^{(1)} \xi^{(2)} dV - p^{(1)} \nu_c^{(2)} = 0$$

$$\text{或} \quad \iiint_V \sigma_z^{(1)} \xi_z^{(2)} dV - p^{(1)} \left. \frac{du^{(2)}}{dt} \right|_c = 0 \quad (25)$$

上式是非线性积分方程,正确解答不易求得。假设

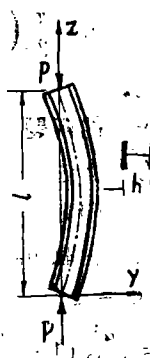


图 4

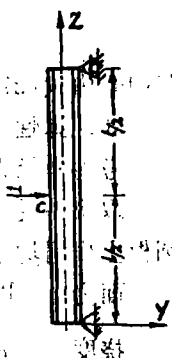


图 5

$$u^{(2)} = a_1 \sin \frac{\pi z}{l}$$

则挠曲速率为

$$v^{(2)} = \frac{du^{(2)}}{dt} = \frac{da_1}{dt} \sin \frac{\pi z}{l}$$

上述近似函数显然满足两端铰支压杆的约束条件。

将诸关系式代入式(25)可得

$$2 \int_0^{l/2} \frac{z}{2Fh} \left(\frac{p}{F\lambda} \right)^m \left[\left(1 + \frac{2a_1}{h} \sin \frac{\pi z}{l} \right)^m - \left(1 - \frac{2a_1}{h} \sin \frac{\pi z}{l} \right)^m \right] Fdz - \frac{da_1}{dt} \sin \frac{\pi z}{l} \Big|_{z=l/2} = 0$$

为了获得具体数值, 取徐变指数 $m=3$, 积分上式可得

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \frac{1}{h} \left(\frac{p}{F\lambda} \right)^3 \left[\frac{12a_1}{h} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \left(\frac{a_1}{h} \right)^3 (12 + 27) \right] \\ &= \frac{12l^2}{h\pi^2} \left(\frac{p}{F\lambda} \right)^3 \left[\frac{a_1}{h} + \frac{28}{27} \left(\frac{a_1}{h} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (26)$$

将上式对时间积分, 并记 $a' = a_1/h$, 利用初始条件

$$a' |_{t=0} = a_0 = \frac{e}{h} \frac{1}{1 - p/p_{cr}} \quad (27)$$

式中, p_{cr} 为压杆的欧拉临界力; e 为杆未受荷载时最大初始挠度。

于是

$$t = \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(\frac{F\lambda}{p} \right)^3 \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{27}{28a_0^2} \right)}{1 + \left(\frac{27}{28a_1^2} \right)} \right] \quad (28)$$

在徐变条件下, 压杆的稳定性往往不取决于固定的临界力, 而是取决于给定工作期限下的容许挠度, 或者所谓的临界时间。为了得到压杆的临界时间, 直接有式(28)中无量纲挠度 a' 趋向无限, 由此可得

$$t_c = \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(\frac{F\lambda}{p} \right)^3 \ln \left[1 + \frac{27}{28a_0^2} \right] \quad (29)$$

其中 a_0 由式(27)确定。

3. 弹性薄板振动的问题

考虑半径为 a 的夹支边圆板, 已知板厚 h , 单位体积质量 ρ , 求其最低固有频率。

取第一受力状态如图6所示的静力状态。设在

圆板上作用均布单位面荷载 $q_0 = 1$ 。因而有

$$\text{面力} \quad P^{(1)} = q_0 = 1$$

$$\text{挠度} \quad w^{(1)} = \frac{a^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \quad (30)$$

$$\text{加速度} \quad \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} = 0$$

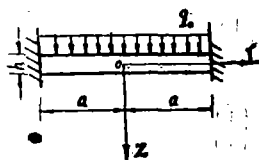


图6

第二受力状态为所求的薄板自由振动状态, 假设其振型函数为 $W = (1 - \frac{r^2}{a^2})^2$. 因而

有

$$\text{面力 } P^{(2)} = 0$$

$$\text{挠度 } w^{(2)} = A(1 - \frac{r^2}{a^2})^2 e^{ipt} \quad (31)$$

$$\text{加速度 } \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} = -p^2 A(1 - \frac{r^2}{a^2})^2 e^{ipt}$$

式中, p 为固有频率.

把两种受力状态结果代入弹性动力问题的互换定理, 式(9)可得

$$2\pi \int_0^a A(1 - \frac{r^2}{a^2})^2 e^{ipt} r dr = \rho p^2 A \int_0^a \frac{2\pi h a^4}{64D} (1 - \frac{r^2}{a^2})^4 e^{ipt} r dr \text{ 积分后移项可得}$$

$$p^2 = \frac{320}{3a^4} \frac{D}{\rho h}$$

$$\text{或 } p = \frac{10.33}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

$$\text{与精确解 } p = \frac{10.22}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \text{ 相比约大 } 1\%.$$

以上仅用 Betti 广义互换定理解决梁的弹塑性、粘弹塑性弯曲, 压杆稳定以及薄板自由振动问题, 可以看出, 该原理用于求解某些弹性动力学, 弹塑性力学和粘弹塑性力学等问题是十分方便的. 此外, 按点本文的方法, 不用做更多的推导, 可以直接导出结构为弹塑性, 粘弹塑性材料以及结构作弹性运动情况下的单位载荷法. 当然, 各种不同材料的单位载荷法仅是 Betti 广义互换定理的特例, 而 Betti 广义互换定理的理论价值和应用范围, 还须进一步发挥和利用.

参 考 文 献

- (1) 徐芝纶, 弹性力学(下册), 人民教育出版社, (1982).
- (2) 徐秉业、陈森灿, 塑性力学简明教程, 清华大学出版社, (1981).
- (3) 付作新, 工程徐变力学, 水利电力出版社, (1985).
- (4) Christensen, R.M., Theory of Viscoelasticity, ACADEMIC PRESS(1982).

The Extension of Betti's Work Reciprocal Theorem and Its Application

Lin Jianhua

Abstract

In this paper, Betti's work reciprocal theorem in the field of elastic mechanics is extended to the study of elastoplasticity, visco-elastoplasticity and the motion state of elastic bodies. A generalized Betti's reciprocal equation in various conditions is derived from the virtual displacement and virtual velocity. Based on the generalized Betti's reciprocal theorem, some examples for the calculation of cantilever beam, stability of compressed bar, and vibration of thin plate are given here.