第8卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.8 No.3
JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)
1987年8月 Aug. 1987

椭圆起偏器和椭圆迟滞器的Jones矩阵与stokes-Mueller矩阵

黄 元 瑋

(应用物理系)

摘 要

用SU(2)群方法找出变换矩阵$T(\Theta, \Delta)$，通过$T(\Theta, \Delta)$与其厄米伴随矩阵T^+对椭圆器件在Jones表象本征矩阵的作用，得到椭圆器件的Jones矩阵及其关系.其次，用SU(2)与O(3)群的同态关系，得出椭圆器件在Stokes表象的Stokes-Mueller矩阵.圆器件与线性器件的Stokes-Mueller矩阵皆为其特殊情形.

一

若以矩阵 $\vec{a}=\begin{pmatrix}\cos\Theta\\ \sin\Theta\cdot e^{i\Delta}\end{pmatrix}$表示Jones表象的椭圆光，那么不改变旋转手征的正交椭圆光为

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}-\sin\Theta\cdot e^{-i\Delta}\\ \cos\Theta\end{pmatrix}$$

可用它们构成

$$T=\begin{pmatrix}\cos\Theta & -\sin\Theta\cdot e^{-i\Delta}\\ \sin\Theta\cdot e^{i\Delta} & \cos\Theta\end{pmatrix}$$

既知在Jones表象中起偏本征矩阵和迟滞本征矩阵分别为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}e^{i\delta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

因此可得椭圆起偏器的Jones矩阵

$$P(\Theta, \Delta)=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^+=\begin{pmatrix}\cos^2\Theta & e^{-i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta\\ e^{i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta & \sin^2\Theta\end{pmatrix}$$

本文1986年7月13日收到.

和椭圆退滞器的Jones矩阵

$$R(\Theta,\Delta,\delta)=T\begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}T^{+}=\begin{vmatrix} e^{i\delta}\cos^2\Theta+\sin^2\Theta & (e^{i\delta}-1)e^{-i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta \\ (e^{i\delta}-1)e^{i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta & e^{i\delta}\sin^2\Theta+\cos^2\Theta \end{vmatrix}$$

显然 T 满足SU(2)，因此有

$$R(\Theta,\ \Delta,\ \delta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(e^{i\delta}-1)P(\Theta,\Delta)$$

从而可得出右旋圆起偏器的Jones矩阵

$$P(45^\circ,\ 90^\circ)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix}$$

和右旋圆退滞器的Jones矩阵

$$R(45^\circ,90^\circ,\ \delta)=\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{vmatrix}$$

若取

$$T(45^\circ,\ -90^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

可得左旋圆器件的Jones矩阵。

取 $\Delta=0^\circ$ 则

$$T(\Theta,\ 0^\circ)=\begin{vmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{vmatrix}$$

就得到线性器件的Jones矩阵，T矩阵为熟知的二维转动矩阵。

利用满足SU(2)的 T 矩阵变换方法得到的器件的Jones矩阵是较简捷的、可取的。而 T 矩阵正好是把给定的矩阵 $R(\Theta,\ \Delta,\ \delta)$和 $P(\Theta,\ \Delta)$同时对角化的变换矩阵，现证明如下：

若给定

$$P(\Theta,\Delta)=\begin{pmatrix} \cos^2\Theta & e^{-i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta \\ e^{i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta & \sin^2\Theta \end{pmatrix}$$

则其特性方程的根为$d_1=0$和$d_2=1$，而其相应的列矩阵是

$$\begin{pmatrix} -e^{-i\Delta}\cdot\sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ e^{i\Delta}\cdot\sin\Theta \end{pmatrix}$$

由它们构成的 T 矩阵为

$$T=\begin{pmatrix} \cos\Theta & -e^{-i\Delta}\cdot\sin\Theta \\ e^{i\delta}\cdot\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

若

$$R(\Theta,\Delta,\delta)=\begin{pmatrix} e^{i\delta}\cos^2\Theta+\sin^2\Theta & (e^{i\delta}-1)e^{-i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta \\ (e^{i\delta}-1)e^{i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta & e^{i\delta}\sin^2\Theta+\cos^2\Theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+(e^{i\Delta}-1)\begin{pmatrix}\cos^2\Theta & e^{-i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta\\ e^{i\Delta}\sin\Theta\cos\Theta & \sin^2\Theta\end{pmatrix}$$

其特性方程的解为$d_1'=1$和$d_2'=e^{i\Delta}$，相应的列矩阵是

$$\begin{pmatrix}-e^{-i\Delta}\sin\Theta\\ \cos\Theta\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\cos\Theta\\ e^{i\Delta}\sin\Theta\end{pmatrix}$$

由它们构成的变换矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\cos\Theta & -e^{-i\Delta}\sin\Theta\\ e^{i\Delta}\cdot\sin\Theta & \cos\Theta\end{pmatrix}.$$

二

若以

$$\vec{S}=\begin{pmatrix}S^0\\ S_1\\ S^2\\ S^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \cos 2\Theta\\ \sin 2\Theta\cos\Delta\\ \sin 2\Theta\sin\Delta\end{pmatrix}$$

表示在 Stokes 表象中单位光强的椭圆光，且知偏光器件的 Jones 表示属于 SU(2)，偏光器件的 Stokes 表示属于O(3)，则两者有同态关系[1-4]：

$$S_0=\vec{a}^+Q_1\vec{a},\quad S_1=\vec{a}^+Q_2\vec{a},\quad S_2=\vec{a}^+Q_3\vec{a}$$

与

$$S_3=\vec{a}^+Q_4\vec{a}$$

此处

$$Q_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad Q_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad Q_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

与

$$Q_4=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

从而可得椭圆起偏器的 Stokes-Mueller 矩阵

$$TP_{ellip}(\Theta,\ \Delta)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \cos 2\Theta & \sin 2\Theta\cos\Delta & \sin 2\Theta\sin\Delta\\ \cos 2\Theta & \cos^2 2\Theta & \sin 2\Theta\cos 2\Theta\cos\Delta & \sin 2\Theta\cos 2\Theta\sin\Delta\\ \sin 2\Theta\cos\Delta & \sin 2\Theta\cos 2\Theta\cos\Delta & \sin^2 2\Theta\cos^2\Delta & \sin^2 2\Theta\sin\Delta\cos\Delta\\ \sin 2\Theta\sin\Delta & \sin 2\Theta\cos 2\Theta\sin\Delta & \sin^2 2\Theta\cdot\sin\Delta\cdot\cos\Delta & \sin^2 2\Theta\sin^2\Delta\end{pmatrix}$$

和椭圆迟滞器的 Stokes–Mueller 矩阵

$$TR_{ellip}(\Theta,\Delta,\delta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\sin^2 2\Theta\sin^2(\frac{\delta}{2}) & \sin 4\Theta\cos\Delta\sin^2(\frac{\delta}{2})+\sin 2\Theta\sin\Delta\sin\delta & \sin 4\Theta\sin\Delta\sin^2(\frac{\delta}{2})-\sin 2\Theta\cos\Delta\sin\delta \\ 0 & \sin 4\Theta\cos\Delta\sin^2(\frac{\delta}{2})-\sin 2\Theta\sin\Delta\sin\delta & 2\sin^2 2\Theta\cos^2\Delta\sin^2(\frac{\delta}{2})+\cos\delta & \sin^2 2\Theta\sin 2\Delta\sin^2(\frac{\delta}{2})+\cos 2\Theta\sin\delta \\ 0 & \sin 4\Theta\sin\Delta\sin^2(\frac{\delta}{2})+\sin 2\Theta\cos\Delta\sin\delta & \sin^2 2\Theta\cdot\sin 2\Delta\sin^2(\frac{\delta}{2})-\cos 2\Theta\sin\delta & 2\sin^2 2\Theta\sin^2\Delta\sin^2(\frac{\delta}{2})+\cos\delta \end{pmatrix}$$

由以上两表式，若令 $\Theta=45°$，$\Delta=90°$，则得到右手征圆器件的Stokes–Mueller 矩阵

$$P(\text{右旋圆})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(\text{右旋圆})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同理可得到线性器件：四分之一波片与二分之一波片的 Stokes–Mueller 矩阵为

$$R(1/4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\Theta & \sin 2\Theta\cos 2\Theta & -\sin 2\Theta \\ 0 & \sin 2\Theta\cos 2\Theta & \sin^2 2\Theta & \cos 2\Theta \\ 0 & \sin 2\Theta & -\cos 2\Theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(1/2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\Theta & \sin 4\Theta & 0 \\ 0 & \sin 4\Theta & -\cos 4\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三

在 Jones 表象中，各种偏振光的起偏器矩阵、迟滞器矩阵均可化为对角型，并有关 系

$$R(\Theta,\Delta,\delta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(e^{i\delta}-1)P(\Theta,\Delta)$$

对应于不同的 Θ 和 Δ 取值，有相应的变换矩阵 T。这里列举的三个特性，在 Stokes 表象中都没有了。所以在该表象中找不到使椭圆起偏器矩阵与迟滞器矩阵同时对角化的变换。椭圆器件的 Stokes-Mueller 表示属于 O(3)，其空间表示是 Poincaré 球，这样使得起偏器当倾角变化时，有

$$P(\Theta+\Delta\Theta)=R(2\Delta\Theta)P(\Theta)R^{+}(2\Delta\Theta)$$

这里

$$R(2\Delta\Theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos 2\Delta\Theta & -\sin 2\Delta\Theta & 0\\ 0 & \sin 2\Delta\Theta & \cos 2\Delta\Theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

它与在 Jones 表象中的变换矩阵完全不一样。

参　考　文　献

〔1〕Takenaka, Nouvelle Revue d'optique 4, 1(1973), 37—41.

〔2〕Takenaka, Japan, J.Appli.Phy., 12, 2(1973), 226.

〔3〕Takenaka, Japan, J.Appli.Phy., 12, 11(1973), 1729.

〔4〕Theocaris, S., Gdoutos, E., Matrix Theory of Photoelasticity, (1979).

Jones Matrices and Stokes-Mueller Matrices for Elliptical Polarizer and Elliptical Retarder

Huang Yuanzhang

Abstract

By using group SU(2) to get transformation matrix $T(\Theta, \Delta)$ and its adjoint matrix T^{+} and thence to operate on eigenmatrices of elliptical instruments in Jones matrices for elliptical polarizer and elliptical retarder are thus obtained. There exists a simple and generalized relationship batween $R(\Theta,\Delta,\delta)$ and $P(\Theta,\Delta)$.

By using homomorphic relationship of group SU(2) to O(3), Stokes-Mueller matrices of ellptical of elliptical instruments in Stokes representation can be obtained.

Then, Stokes-Mueller matrices of circular and linear instruments, both are special simplified cases of elliptical instruments, are discussed.