第8卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 8 No. 3
JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY
1987年8月 (NATURAL SCIENCE) Aug. 1987

星象函数的一个常数估计

刘 增 荣

（应用数学系）

摘 要

设函数 $f(z)=z+\cdots$ 共形地映单位圆 $|z|<1$ 成一个关于原点成星形的区域，记此种函数的全体所成之族为 S^*. 对于 $f\in S^*$，以 $r_0=r_0(f)$ 表其凸性半径，並置 $d_0=\min\limits_{\theta}|f(r_0e^{i\theta})|$；$d^*=\min\limits_{\theta}|f(e^{i\theta})|$ 及 $c=\inf\limits_{f\in S^*} d^*\left\{\frac{d_0}{d^*}\right\}$.

本文将证明 $c\geq 0.412085\cdots$. 常数 c 的历史可追溯如下：$c\geqslant 0.2679\cdots$[1]，$0.343\cdots$[2]，$0.380\cdots$[3]，$0.38177\cdots$，$0.410\cdots$[6].

一、引 言

设函数 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 在单位圆 $|z|<1$ 上是解析的、单叶的，且 $|z|<1$ 在 $w=f(z)$ 下的象区域 D_f 关于原点成星形（即若 $w\in D_f$，则直线段 $\overline{ow}\subset D_f$），把这样的函数全体所成的类记作 S^*，称 S^* 中的函数 $f(z)$ 为星象函数. 对于 $f\in S^*$，称 $r_0=r_0(f)$ 是 f 的凸象半径，即 r_0 是使得 $|z|<r$ 在 $w=f(z)$ 下的象区域 $D_f(r)$ 为凸的最大的 r. 又记 $d_0=\min\limits_{\theta}|f(r_0e^{i\theta})|$，$d^*=\min\limits_{\theta}|f(e^{i\theta})|$.

1953 年，A. Schild[1] 在证明了 $\frac{d_0}{d^*}\geqslant 2-\sqrt{3}=0.2679\cdots$ 后，曾猜想 $\frac{d_0}{d^*}\geqslant\frac{2}{3}$ 对一切 $f\in S^*$ 成立（而函数 $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}\in S^*$ 达到 $\frac{2}{3}$）. 1970 年，D. E. Tepper[2] 在其博士论文中得到 $\frac{d_0}{d^*}\geqslant 0.343\cdots$. 1972 年，在 C. P. McCarty 和 D. E. Tepper[3] 的博士论文中又把它改进到 $\frac{d_0}{d^*}\geqslant 0.380\cdots$. 1973年，R. W. Barnard 和 J. L. Lewis[4] 举出反例说明Schild

本文1986年11月27日收到.

之猜想不真. 1974年的美国《数学评论》第48卷上在评价文[4]的工作后说到$\frac{d_0}{d^*}$的最大下界仍是一个未决的问题. 1976年6月, Schild[5] 再次提出寻找$\frac{d_0}{d^*}$的准确下界的问题. 1983年夏, 陈跃庆获得$\frac{d_0}{d^*}\geqslant 0.38177\cdots$, 而后黄心中[6]把它改进成$\frac{d_0}{d^*}\geqslant 0.410\cdots$. 本文将证明$\frac{d_0}{d^*}\geqslant 0.412085\cdots$, 且方法并不依赖于文[3]、[6]中的结果.

二、有关引理

首先叙述文中用到的几个引理.

引理 1 若 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S^*$, $r_0=r_0(f)$是f的凸象半径, 则

$$r_0\geqslant r_0(a)=\frac{a+\sqrt{a^2+32}-\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2+32}+16}}{4}\qquad (a=|a_2|)$$

引理 2 对于引理1中定义的函数$r_0(a)$, 有

$$a=\frac{1-6r_0^2(a)+r_0^4(a)}{r_0(a)(1+r_0^2(a))}$$

及

$$r_0'(a)<0,\quad 0\leqslant a\leqslant 2$$

由此不难得到$2-\sqrt{3}\leqslant r_0(a)\leqslant\sqrt{2}-1$.

以上两个引理的证明均见于文[2].

引理 3 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S^*$, $d^*=\min_{\theta}|f(e^{i\theta})|$, 则$0\leqslant|a_2|\leqslant 2b^2$, $0\leqslant b\leqslant 1$. 其中b满足

$$d^*=[(1+b)^{1+b}(1-b)^{1-b}]^{-1}=\phi(b)$$

此引理容易从文[7]中的结果推出. 对上述$\phi(b)$, 简单的计算表明

引理 4 $\phi'(b)=-\phi(b)\log\frac{1+b}{1-b}\leqslant 0$, $0\leqslant b\leqslant 1$. 从而, $\frac{1}{4}\leqslant\phi(b)\leqslant 1$.

引理 5[8] 设$\omega(z)$在$|z|<1$上解析, 且$|\omega(z)|<1(|z|<1)$, 则

$$|\omega(z)|\leqslant\frac{|\omega(0)|+|z|}{1+|\omega(0)||z|}\quad(|z|<1)$$

引理 6 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S^*$, $r_0=r_0(f)$, $d_0=\min_{\theta}|f(r_0e^{i\theta})|$ 而 $d^*=\min_{\theta}|f(e^{i\theta})|$, 则

$$\frac{d_0}{d^*}\geqslant r_0\frac{1+d^*r_0}{d^*+r_0}$$

证　应用引理 5 到函数 $\omega(z)=d^*\frac{z}{f(z)}$，有

$$\left|d^*\frac{z}{f(z)}\right|\leqslant\frac{d^*+|z|}{1+d^*|z|}$$

特别是

$$\max_{|z|=r_0}\left|d^*\frac{z}{f(z)}\right|\leqslant\frac{d^*+r_0}{1+d^*r_0}$$

即

$$d^*\frac{r_0}{d_0}\leqslant\frac{d^*+r_0}{1+d^*r_0}$$

引理 6 证毕。

三、定理的证明

经过上面这些准备之后，即可开始证明下面的

定理　在引理 6 的假设下，有

$$\frac{d_0}{d^*}\geqslant 0.412085\cdots$$

证　注意到对固定的 $d^*=\phi(b)$，$r_0\frac{1+d^*r_0}{d^*+r_0}$ 是 r_0 的增加函数，由引理 2 和 3，$r_0\geqslant r_0(a)\geqslant r_0(2b^2)$，$a=|a_2|$，又据引理 6 得

$$\frac{d_0}{d^*}\geqslant r_0(2b^2)\frac{1+\phi(b)r_0(2b^2)}{\phi(b)+r_0(2b^2)},\quad 0\leqslant b\leqslant 1 \tag{1}$$

令 $R=r_0(2b^2)$，从引理 2 有

$$2b^2=\frac{1-6R^2+R^4}{R(1+R^2)},\quad 2-\sqrt{3}\leqslant R\leqslant\sqrt{2}-1$$

或

$$b=\sqrt{\frac{1-6R^2+R^4}{2R(1+R^2)}}=h(R) \tag{2}$$

于是式(1)可改写成

$$\frac{d_0}{d^*}\geqslant R\frac{1+\phi(h(R))R}{\phi(h(R))+R}\equiv g(R),\quad 2-\sqrt{3}\leqslant R\leqslant\sqrt{2}-1 \tag{3}$$

故问题归结为 $\min g(R)\ (2-\sqrt{3}\leqslant R\leqslant\sqrt{2}-1)$ 的计算。

于 $\log g(R)=\log R+\log[1+\phi(h(R))\cdot R]-\log[\phi(h(R))+R]$ 两边对 R 求导数，有

$$\begin{aligned}\frac{g'(R)}{g(R)}&=\frac{1}{R}+\frac{\phi(h)+R\phi'(h)\cdot h'(R)}{1+R\phi(h)}-\frac{1+\phi'(h)\cdot h'(R)}{\phi(h)+R}\\&=\frac{1}{R}+\frac{\phi(h)^2-1-(1-R^2)\phi'(h)\cdot h'(R)}{(1+R\phi(h))(\phi(h)+R)}\\&=\frac{1/R(1+R\phi(h))(\phi(h)+R)+\phi(h)^2-1-(1-R^2)\phi'(h)\cdot h'(R)}{(1+R\phi(h))(\phi(h)+R)}\end{aligned}$$

$$= \frac{(R+1/R)\phi(h)+2\phi(h)^2-(1-R^2)\phi'(h)\cdot h'(R)}{(1+R\phi(h))(\phi(h)+R)}$$

$$= \frac{\phi(h)}{(1+R\phi(h))(\phi(h)+R)}\left[R+\frac{1}{R}+2\phi(h)-(1-R^2)h'(R)\frac{\phi'(h)}{\phi(h)}\right]$$

$$= \frac{\phi(h)}{(1+R\phi(R))(\phi(h)+R)}\left[R+\frac{1}{R}+2\phi(h)+(1-R^2)h'(R)\log\frac{1+h(R)}{1-h(R)}\right]$$

由此可见，$g'(R)$与函数

$$\Psi(R)=R+\frac{1}{R}+2\phi(h(R))+(1-R^2)h'(R)\log\frac{1+h(R)}{1-h(R)}\quad(2-\sqrt{3}\leqslant R\leqslant\sqrt{2}-1)$$

同号.

由于$\Psi(R)$是严格单调增加的（后面将证明），故$\Psi(R)$在$2-\sqrt{3}\leqslant R\leqslant\sqrt{2}-1$上至有一个零点，计算表明$\Psi(R)$的零点出现在$R_0=0.390334690\cdots$，从而易知

$$g(R)\geqslant g(R_0)=0.4120857\cdots(2-\sqrt{3}\leqslant R\leqslant\sqrt{2}-1)$$

最后来证$\Psi'(R)>0(2-\sqrt{3}\leqslant R\leqslant\sqrt{2}-1)$.

直接计算得到

$$\Psi'(R)=1-\frac{1}{R^2}+2\phi'(h)h'(R)-2Rh'(R)\log\frac{1+h}{1-h}$$
$$+(1-R^2)h''(R)\log\frac{1+h}{1-h}+2(1-R^2)\frac{h'(R)^2}{1-h^2}\tag{4}$$

据引理4

$$\phi'(h)=-\phi(h)\log\frac{1+h}{1-h}\tag{5}$$

又由式(2)，取对数后微分得

$$h'(R)=\frac{1}{2}h(R)p(R)\tag{6}$$

其中

$$p(R)=-\left(\frac{12R-4R^3}{1-6R^2+4R^4}+\frac{1+3R^2}{R+R^3}\right)\tag{7}$$

于式(6)两边对R求导数得

$$h''(R)=\frac{1}{2}\left[h'(R)p(R)+h(R)p'(R)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}h(R)p(R)^2+h(R)p'(R)\right]$$
$$=\frac{1}{2}h(R)\left[\frac{1}{2}p(R)^2+p'(R)\right]\tag{8}$$

把式(5)、(6)、(8)代入式(4)，并注意到$p(R)<0$，导得

$$\Psi'(R)=1-\frac{1}{R^2}-p(R)[R+\phi(h)]h(R)\log\frac{1+h(R)}{1-h(R)}$$
$$+\frac{1}{2}(1-R^2)\left[\frac{1}{2}p(R)^2+p'(R)\right]h(R)\log\frac{1+h(R)}{1-h(R)}+\frac{1}{2}(1-R^2)p(R)^2\frac{h(R)^2}{1-h(R)^2}$$
$$\geqslant 1-\frac{1}{R^2}+\frac{1}{2}(1-R^2)\left[\frac{1}{2}p(R)^2+p'(R)\right]h(R)\log\frac{1+h(R)}{1-h(R)}+$$

$$+\frac{1}{2}(1-R^2)p(R)^2\frac{h(R)^2}{1-h(R)^2}. \tag{9}$$

利用初等的不等式

$$2x\leqslant\log\frac{1+x}{1-x}\leqslant\frac{2x}{1-x^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{10}$$

有$\frac{h(R)}{1-h(R)^2}\geqslant\frac{1}{2}\log\frac{1+h(R)}{1-h(R)}$。此不等式结合式(9)得到

$$\Psi'(R)\geqslant 1-\frac{1}{R^2}+\frac{1}{2}(1-R^2)[p(R)^2+p'(R)]h(R)\log\frac{1+h(R)}{1-h(R)} \tag{11}$$

又由式(7)不难验证

$$p(R)^2+p'(R)=2\frac{12R-4R^3}{1-6R^2+R^4}\cdot\frac{1+3R^2}{R+R^3}-\frac{12(1-R^2)}{1-6R^2+R^4}+2\frac{(1+3R^2)^2}{(R+R^3)^2}-\frac{6R}{R+R^3}$$

$$=\frac{4}{1-6R^2+R^4}\left[\frac{2(3-R^2)(1+3R^2)}{1+R^2}-3(1-R^2)\right]+\frac{2}{(R+R^3)^2}[(1+3R^2)^2-3R(R+R^3)]$$

$$=\frac{4}{1-6R^2+R^4}\cdot\frac{1}{1+R^2}[2(3-R^2)(1+3R^2)-3(1-R^4)]+\frac{2}{(R+R^3)^2}(1+3R^2+6R^4)$$

$$\geqslant\frac{4}{1-6R^2+R^4}\cdot\frac{1}{1+R^2}(3+16R^2-3R^4)$$

$$=\frac{2}{R(1+R^2)^2}(3+16R^2-3R^4)\cdot\frac{1}{h(R)^2} \tag{12}$$

式(12)中最后一个等式是因为式(2)可改写为

$$1-6R^2+R^4=2R(1+R^2)h(R)^2$$

式(12)结合式(11)，并注意到式(10)左端的不等式，便有

$$\Psi'(R)\geqslant 1-\frac{1}{R^2}+\frac{(1-R^2)(3+16R^2-3R^4)}{R(1+R^2)^2}\cdot\frac{1}{h(R)}\log\frac{1+h(R)}{1-h(R)}$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{R^2}+2\frac{(1-R^2)(3+16R^2-3R^4)}{R(1+R^2)^2}$$

$$=\frac{1-R^2}{R^2(1+R^2)^2}(6R+32R^3-6R^5-1-2R^2-R^4)$$

$$=\frac{1-R^2}{R^2(1+R^2)^2}[(4R-1)+(2R-2R^2)+25R^3+(R^3-R^4)$$

$$+(6R^3-6R^5)]>0(2-\sqrt{3}\leqslant R\leqslant\sqrt{2}-1)$$

这就证明了$\Psi'(R)>0$。定理证毕。

参 考 文 献

〔1〕Schild, A., On a Problem in Conformal Mapping of Schlicht Functions, Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 43—51.

〔2〕Tepper, D.E., On The Radius of Convexity and Boundary Distortion of Schlicht

Functions, Trans.Amer.Math.Soc., 150 (1970), 519—528.

〔3〕McCarty, C.P.and Tepper, D.E., A Note on the 2/3 Conjecture for Starlike Functions, Proc.Amer.Math.Soc., 34 (1972), 417—421.

〔4〕Barnard, R.W.and Lewis, J.L., A Counterexample to the Two—Third Conjecture, Proc.Amer.Math.Soc., 4(1973), 525—529.

〔5〕Miller, S.S., Complex Analysis, Proceedings of the S.U.N.Y.Brockport Conference, Marcel Dekker, Inc., New-York, (1978), 172.

〔6〕黄心中, Estimate of d_0/d^* for Starlilke Functions, Chin. Ann. Math., 7B, 2(1986), 139—145.

〔7〕Barnard, R.W.and Lewis, J.L., Coefficient Bounds for Some Classes of Starlike Functions, Pacific J. Math., 56(1975), 325—331.

〔8〕Nehari, Z., Conformal Mapping, McGraw-Hill, New York, (1952), 167.

Estimate of a Certain Constant of Starlike Functions

Liu Zengrong

Abstract

Let S^* be the class of functions $f(z)=z+\cdots$ which maps the unit disk $|z|<1$ conformally onto a domain starlike with respect to the origin. It is supposed that $r_0=r_0(f)$ denotes the radius of convexity for $f\in S^*$ and set $d_0=\min_\theta|f(r_0e^{i\theta})|$, $d^*=\min_\theta|f(e^{i\theta})|$ and $c=\inf_{f\in S^*}\left\{\frac{d_0}{d^*}\right\}$.

In this note $c\geqslant 0.412085\cdots$ will be proved. The history of constant c may be traced as follows: $c\geqslant 0.2679\cdots$[1], $0.343\cdots$[2], $0.380\cdots$[3], $0.38177\cdots$, $0.410\cdots$[6].