第8卷 第3期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol. 8 No.3
JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY
1987年8月　　(NATURAL SCIENCE)　　Aug. 1987

退缩反应扩散方程解的blow-up与一致有界性

梁学信　　吴在德
(华侨大学)　　(天津大学)

摘　要

文中应用极值原理讨论退缩反应扩散方程的非线性边值问题解在有限时间的blow-up，并给出解的blow-up速率的上界估计，证明在对称区域的情况只有一个blow-up点。最后，讨论方程的始边值问题解在某种假设下整体一致有界；这个界不依赖于时间。

一、引　言

非线性偏微分方程的Cauchy问题或混合问题，在一定条件下可产生blow-up现象。而blow-up现象有广泛的现实背景，因此这方面的研究近年来发展非常迅速，尤其是，最近关于blow-up点的分布以及解在blow-up点的性态研究工作的发表[1-4]，更引起人们的兴趣。

关于blow-up问题的工作大致有以下几个方面：

(1) 现有的工作大多是考察产生blow-up现象的充分条件，这一方面的研究已相当深入。然而，由于这些工作所用的方法不同，即使是讨论同样的问题，置于问题的非线性项和初值的条件也不尽相同，且这些条件很难加以比较。所以这一方面的研究仍有深入的必要。

(2) 关于blow-up时刻上、下界的估计，现已有人工作[5]。精确估计发生blow-up时刻是较为困难的问题。

(3) 解blow-up速率的估计[2-4]。

(4) 解blow-up点的分布的讨论，在文献〔1, 4〕中讨论了在对称区域上半线性热传导方程的混合问题，解的blow-up点的集合只有单个点组成，当区域为非对称情形时，解的blow-up点集是一个紧子集[4]。文献[6]还考察了非线性双曲型方程的Cauchy问题，他们证明了问题解的blow-up点组成的曲线是连续可微的，这个结果是很有意思的。

本文研究类似于文献〔7,8〕所研究的一类退缩反应扩散方程

本文1986年9月12日收到。
• 中国科学院和福建省科学基金资助课题。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$a(u)u_t=\triangle(\phi(u))+f(u)$$

的非线性边值条件的 blow-up 问题。我们主要用极值原理，因而所给出的条件与文〔7，8〕有所不同。文中还给出解 blow-up 速率的上界估计．以及在对称区域只有一个 blow-up 点。最后，讨论了方程的始边值问题解在某种假设下是全局有界的，这个界不依赖于时间。文〔7〕有类似结果，可是文〔7〕中解的上界是依赖于时间的。

二、解的 blow-up

设 Ω 是 n 维欧氏空间 R^n 中的有界域，$\partial\Omega$ 为 Ω 的光滑边界，并记 $Q=\Omega\times(O,T)$，$Q_0=\Omega\times\{0\}$，$\Gamma=\partial\Omega\times(O,T)$。

考虑问题

$$a(u)u_t=\triangle[\phi(u)]+f(u)\qquad 在 Q 内 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(u)=0\qquad 在 \Gamma \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x)>0\qquad 在 Q_0 \tag{3}$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的外法向，$\partial\Omega$ 的每点有强内球性质。

定理 1　设 $u(x,t)$ 为问题(1)—(3)的光滑解，并满足条件：

（Ⅰ）a，ϕ，f 和 σ 是光滑函数，对所有的 $s>0$ 有 $f(s)>0$，$\phi'(s)>0$ 及 $f(0)=0$，$\phi'(0)=0$，并对所有 $s\geqslant0$，$a(s)\geqslant a_0>0$，$\phi''(s)\geqslant0$ 和 $\sigma(s)\geqslant0$。

（Ⅱ）$f''(s)\phi'(s)-f'(s)\phi''(s)\geqslant0$，$\phi''(s)a(s)-\phi'(s)a'(s)\geqslant0$，$\forall s\geqslant0$。

（Ⅲ）对 $\forall s\geqslant0$，在 Γ 有

$$\sigma'(s)\phi'(s)+\sigma(s)\phi''(s)\geqslant0$$

$$\sigma(s)[\phi'(s)f'(s)-\phi''(s)f(s)]\geqslant\sigma'(s)f(s)\phi'(s)$$

（Ⅳ）记 $M_0=\max\limits_{\Omega}u_0(x)>0$，并存在常数 $\varepsilon>0$，使

$$\frac{\phi'(u_0)}{a(u_0)}[\triangle(\phi(u_0))+f(u_0)]\geqslant\varepsilon f(u_0)$$

（Ⅴ）记　$G(u)=\int_{M_0}^{u}\frac{\phi'(s)}{f(s)}ds$，设 $G(u)$ 收敛于常数 C。那么存在 $t_1>0$，使

$$\lim_{t\to t_1^-}\max_{\Omega}u(x,t)=+\infty \tag{4}$$

其中

$$t_1\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_{M_0}^{+\infty}\frac{\phi'(s)}{f(s)}ds \tag{5}$$

证　令 $v=\phi'(u)u_t-\varepsilon f(u)$

用条件(Ⅰ)—(Ⅳ)经直接计算得

$$a(u)v_t-\phi'(u)\triangle v-f'(u)v=[\phi''(u)a(u)-\phi'(u)a'(u)]u_t^2+\varepsilon[f''(u)\phi'(u)-f'(u)\phi''(u)]|\nabla u|^2\geqslant0\qquad 在 Q 内$$

且 $f'(u)$ 有上界，否则有 $\max\limits_{Q}u(x,t)=+\infty$，结论便得。而在 Γ 上，v 满足

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\phi'(u)\frac{\partial v}{\partial n}+[\sigma'(u)\phi'(u)+\sigma(u)\phi''(u)]v$$

$$=\varepsilon\{\sigma(u)[f'(u)\phi'(u)-f(u)\phi''(u)]-f(u)\phi'(u)\sigma'(u)\}\geqslant 0 \tag{6}$$

由此可得在 Γ 上 $v\geqslant 0$。若不然 v 在 Γ 有负的极小值，设在 $(x^*,\ t^*)\in\Gamma$ 处达到，那么(1)当 $u^*=u(x^*,\ t^*)=0$ 时，有 $v(x^*,\ t^*)=\phi'(o)u_t-\varepsilon f(o)=0$；(2)当 $u(x^*,\ t^*)>0$ 时，有 $\phi'(u^*)>0$，而这时 $\frac{\partial v(x^*,t^*)}{\partial n}<0$，所以有

$$\phi'(u^*)\frac{\partial v}{\partial n}+[\sigma'(u^*)\phi'(u^*)+\sigma(u^*)\phi''(u^*)]v<0$$

与式(6)矛盾。又

$$v(x,\ 0)=\frac{\phi'(u_0)}{a(u_0)}[\triangle(\phi(u_0))+f(u_0)]-\varepsilon f(u_0)\geqslant 0,\qquad \text{在}Q_0\text{上}$$

因此由极值原理便得

$$v=\phi'(u)u_t-\varepsilon f(u)\geqslant 0 \tag{7}$$

积分，由式(7)得

$$G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{\phi'(s)}{f(s)}ds\geqslant\varepsilon t \tag{8}$$

于是，式(4)、(5)的结论可由式(8)和条件(Ⅴ)推出。

推论　设 $u(x,\ t)$ 为问题(1)—(3)的光滑解，满足定理1的条件，并设 $\phi'(s)>0$，那么有

$$u(x,\ t)\leqslant F^{-1}[\varepsilon(t_1-t)] \tag{9}$$

其中 F^{-1} 为 $F(u)=\int_u^{+\infty}\frac{\phi'(s)}{f(s)}ds$ 的反函数。

证　因 $\phi'(s)>0$，所以 $F(u)$ 的反函数 F^{-1} 存在且为单减函数。从式(7)积分，即得式(9)。

三、在对称区域上的blow-up点

考虑 Ω 是球 $B_R=\{|x|<R\}$ 的情形，为简单起见，令 $a(u)\equiv 1$，方程(1)成为

$$u_t=\triangle[\phi(u)]+f(u),\qquad \text{在}B_R\times(o,\ T)\text{内} \tag{1'}$$

边值条件(2)取为

$$u(R,\ t)=0,\qquad \text{在}\partial B_R\times(o,\ T)\text{上} \tag{2'}$$

以及初值条件(3)附加假设

$$u(r,\ o)=u_0(r)>0 \tag{3'}$$

并在 $0<r<R$，$u_0'(r)<0$。那么，当置 $w=r^{n-1}\phi'(u)u_r$，如同文[4]那样证明，就有

引理1　在 $B_R\times(0,\ T)\cap\{r>0\}$ 中

$$w=r^{n-1}\phi'(u)u_r\leqslant 0$$

定理2　设函数 $u(r,\ t)$ 为问题(1′)—(3′)的光滑解，并满足条件：

(Ⅰ) 设 ϕ，f 是光滑函数，对所有 $s>0$ 有 $f(s)>0$，以及对所有 $s\geqslant 0$ 有 $\phi'(s)$，$\phi''(s)\geqslant 0$。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

（Ⅱ）对所有 $s>0$，存在函数 $F(s)>0$，以及对所有 $s\geqslant 0$，$F'(s)\geqslant 0$，$F''(s)\geqslant 0$，并存在充分小的 $\varepsilon>0$，使

$$f'(s)F(s)-f(s)F'(s)\geqslant 2\varepsilon F(s)F'(s) \tag{10}$$

和

$$F''(s)\phi'(s)-F'(s)\phi''(s)\geqslant 0 \tag{11}$$

成立。

（Ⅲ）设初值 $u_0(r)>0$，满足

$$u_0'(r)<0 \text{ 和 } \triangle[\phi(u_0)]+f(u_0)\geqslant 0 \tag{12}$$

（Ⅳ）记 $M_0=\max\limits_{B_R} u_0(r)>0$，$\int_{M_0}^{+\infty}\frac{\phi'(s)}{F(s)}ds$ 收敛。

那么问题(1′)—(3′)的解仅在 $r=0$ 发生 blow-up。

证 首先，把方程(1′)和边值条件(2′)对 t 求导，于是由假设式(12)立即推出在 $B_R\times(0,T)$ 中 $u_t\geqslant 0$ 。

令 $w=r^{n-1}\phi_r=r^{n-1}\phi'(u)u_r$，方程(1′)可改写为

$$u_t-\frac{1}{r^{n-1}}w_r=f(u),\qquad \text{在}0<r<R \tag{1''}$$

将式(1″)对 r 求导后，在两端同时乘以 $r^{n-1}\phi'(u)$，有

$$w_t-\phi'(u)(w_{rr}-\frac{n-1}{r}w_r)=f'(u)w+r^{n-1}\phi''(u)u_ru_t,\qquad 0<r<R \tag{13}$$

由于已知 $u_t\geqslant 0$，$\phi''\geqslant 0$ 和引理的结论，式(13)右端的最后一项为非正。因此，设

$$J=w+\varepsilon r^nF(u)$$

那么由式(13)得出

$$J_t-\phi'(u)(J_{rr}-\frac{n-1}{r}J_r)-f'(u)J=\varepsilon r^nF'(u)u_t+r^{n-1}\phi''(u)u_ru_t$$

$$-\varepsilon\phi'(u)[(r^nF(u))_{rr}-\frac{n-1}{r}(r^nF(u))_r]-\varepsilon r^nf'(u)F(u)$$

$$\leqslant\varepsilon r^nF'(u)[\phi'(u)u_{rr}+\phi''(u)u_r^2+\frac{n-1}{r}\phi'(u)u_r+f(u)]$$

$$-\varepsilon\phi'(u)[n(n-1)r^{n-2}F(u)+2nr^{n-1}F'(u)u_r+r^nF'(u)u_{rr}$$

$$+r^nF''(u)u_r^2-\frac{n(n-1)}{r}\times r^{n-1}F(u)-(n-1)r^{n-1}F'(u)u_r]-\varepsilon r^nf'(u)F(u)$$

$$\leqslant-\varepsilon r^n[F''(u)\phi'(u)-F'(u)\phi''(u)]u_r^2-\varepsilon r^n[f'(u)F(u)$$

$$-f(u)F'(u)]-2\varepsilon r^{n-1}F'(u)\phi'(u)u_r,\qquad \text{在}0<r<R \tag{14}$$

由假设(11)，知上式右端第一项为非正，以及利用关系

$$-2\varepsilon r^{n-1}F'(u)\phi'(u)u_r=-2\varepsilon F'(u)[J-\varepsilon r^nF(u)]$$

那么式(14)成为

$$J_t-\phi'(u)(J_{rr}-\frac{n-1}{r}J_r)-[f'(u)-2\varepsilon F'(u)]J$$

$$\leqslant-\varepsilon r^n[f'(u)F(u)-f(u)F'(u)-2\varepsilon F(u)F'(u)]\leqslant 0,\qquad \text{在}0<r<R$$

所以 J 在 $B_R\times(0,T)$ 内或 $t=T$ 上不可能达到正的极大。另外

$$J(0,t)=0$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

又由假定(3′)和式(12)，只要选取ε充分小，就有

$$J(r,\ 0)\leqslant 0$$

并且由边值条件(2′)和(1″)，只要取ε充分小，就有

$$\begin{aligned}J_r(R,\ t)&=[w_r+\varepsilon r^n F'(u)u_r+\varepsilon n r^{n-1}F(u)]\big|_{r=R}\\&\leqslant[w_r+\varepsilon n r^{n-1}F(u)]\big|_{r=R}\\&=-R^{n-1}[f(0)-\varepsilon nF(0)]\leqslant 0\end{aligned}$$

因此，在$B_R\times(0,\ T)$有

$$J(r,\ t)\leqslant 0$$

即

$$-\phi'(u)u_r\geqslant\varepsilon rF(u)$$

又因

$$\int_{M_0}^{+\infty}\frac{\phi'(s)}{F(s)}ds<+\infty$$

推知

$$G[u(r,\ t)]\equiv\int_{u(r,\ t)}^{+\infty}\frac{\phi'(s)}{F(s)}ds\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon r^2 \tag{15}$$

且如果对某个$r>0$，当$t\to t_1$时，$u(r,\ t)\to+\infty$，就有$\lim\limits_{t\to t_1}G[u(r,\ t)]=0$，这与式(15)矛盾。定理证完。

四、解的一致有界性

下面讨论问题

$$a(u)u_t=\triangle[\phi(u)]+f(u),\qquad 在\ \Omega\times(0,\ +\infty) \tag{16}$$

$$u|_\Gamma=0,\qquad 在\ \partial\Omega\times(0,\ +\infty) \tag{17}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x)\geqslant 0,\qquad 在\ Q_0 \tag{18}$$

的正解当$a(u)=u^{m-1}$，$m>0$，$\phi(u)=f(u)=u^p$，$p>1$时解的一致有界性。文[7]有类似的讨论，但那里解的$L^\infty(Q_T)$范数依赖于T。现用迭代法[9,10]证明，上述问题(16)—(18)的解$u(x,\ t)$对所有$t\geqslant 0$都是一致有界的。

定理 3 设$u_0(x)\in L^\infty(\Omega)$，且$u_0(x)\geqslant 0$。

(1) 当$a(u)=u^{m-1}$，$m>0$，$\phi(u)=f(u)=u^p$，$p>1$，且$|\Omega|\leqslant 1$时，那么问题(16)—(18)的正解$u(x,\ t)$对所有$t\geqslant 0$一致有界。

(2) 当$\phi(u)=u^p$，$f(u)=u^{\bar p}$，且$\bar p<p$时，那么对所有$t\geqslant 0$，$u(x,\ t)$一致有界。

先证

引理 2 在定理条件下

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u(\cdot,\ t)\|_\infty\leqslant M^{\delta_1}K(r)U_r^{\delta_2}.$$

其中

$$U_r=\max(1,\ U_0,\ \sup_{t\geqslant 0}\|u(\cdot,\ t)\|_r)$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\|u(\cdot, t)\|_r^r = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x, t)|^r dx$$

$$U_0 = \|u_0(x)\|_\infty = \max_\Omega |u_0(x)|$$

且$r > \max(\frac{p}{2}, p-m)$。$M$，$K(r)$，$\delta_1$和$\delta_2$具体将在证明中给出。

证 以$u^\alpha(\alpha>0)$乘方程(16)，在Ω上积分，并将第二项分部积分得

$$\int_\Omega (u^{\alpha+m-1}u_t + \alpha p u^{\alpha+p-2}|\nabla u|^2)\, dx = \int_\Omega u^{\alpha+p} dx \tag{19}$$

设

$w = u^{\frac{\alpha+p}{2}}$，则$u = w^{\frac{2}{\alpha+p}}$，式(19)成为

$$\frac{1}{\alpha+m}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^{\frac{2(\alpha+m)}{\alpha+p}} dx + \frac{4\alpha p}{(\alpha+p)^2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \int_\Omega w^2 dx \tag{20}$$

应用不等式

$$\begin{aligned}\|w\|_2 &\leqslant K_0(n, \Omega)\|\nabla w\|_2^q \|w\|_1^{1-q} \text{ [11]}\\ &\leqslant K_1(n, \Omega)(\|w\|_1 + \|w\|_1^\beta \|\nabla w\|_2^{1-\beta})\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$q = \frac{n}{n+2}$，$0<\beta<\frac{2}{n+2}$，K_0，$K_1>0$是常数。记

$$L = \frac{1}{\alpha+m}\frac{d}{dx}\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w^{\frac{2(\alpha+m)}{\alpha+p}} dx + \frac{4\alpha p}{(\alpha+p)^2|\Omega|}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx$$

那么由式(20)、式(21)得

$$\begin{aligned}L &\leqslant K_1^2(\|w\|_1 + \|w\|_1^\beta \|\nabla w\|_2^{1-\beta})^2\\ &\leqslant 2K_1^2(\|w\|_1^2 + \|w\|_1^{2\beta}\|\nabla w\|_2^{2(1-\beta)})\\ &\leqslant 2K_2^2(\|w\|_1^2 + \varepsilon\|\nabla w\|_2^2 + \varepsilon^{-(1-\beta)/\beta}\|w\|_1^2)\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \dfrac{\alpha p}{(\alpha+p)^2K_1^2}$，由上不等式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha+m}\frac{d}{dt}\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w^{\frac{2(\alpha+m)}{\alpha+p}} dx + \frac{2\alpha p}{(\alpha+p)^2|\Omega|}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\\ &\leqslant 2K_1^2[1 + (\frac{(\alpha+p)^2K_1^2}{\alpha p})^{(1-\beta)/\beta}]\|w\|_1^2\end{aligned} \tag{22}$$

由嵌入定理和Hölder不等式

$$\begin{aligned}\int_\Omega w^2 dx &= \int_\Omega w^{\frac{ns}{n-s}} dx \qquad s = \frac{2n}{n+2}\\ &\leqslant C^2(\int_\Omega |\nabla w|^s dx)^{\frac{2}{s}} \text{ [9]} \qquad 0<C<1\\ &\leqslant C^2|\Omega|^{\frac{2}{n}}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx.\end{aligned} \tag{23}$$

如果记

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sigma(r)=\frac{2(\alpha+m)}{\alpha+p}=2-\frac{p-m}{r},\quad r=\frac{\alpha+p}{2}$$

那么结合式(22)、(23)得

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{\sigma(r)}^{\sigma(r)}+\frac{(2r-p)(2r-p+m)p}{2c^2r^2|\Omega|^{2/n}}\|w\|_2^2$$

$$\leqslant 2K_1^2(2r-p+m)\Big[1+\Big(\frac{4r^2K_1^2}{(2r-p)p}\Big)^{(1-\beta)/\beta}\Big]\|w\|_1^2 \tag{24}$$

上式积分，当 $0<m\leqslant p$ 时

$$U_{\sigma(r)r}^{\sigma(r)r}\leqslant \max\Big(U_0^{\sigma(r)r},\ \frac{4c^2r^2|\Omega|^{\frac{2}{n}}K_1^2}{(2r-p)p}\Big[1+\Big(\frac{r^2K_1}{(2r-p)p}\Big)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\Big]U_r^{2r}\Big)$$

当 $m>p$ 时

$$U_{2r}^{2r}\leqslant \max\Big(U_0^{2r},\ \frac{4c^2r^2|\Omega|^{\frac{2}{n}}K_1^2}{(2r-p)p}\Big[1+\Big(\frac{r^2K_1^2}{(2r-p)p}\Big)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\Big]U_r^{2r}\Big)$$

因为

$$\frac{4c^2r^2|\Omega|^{\frac{2}{n}}K_1^2}{(2r-p)p}\Big[1+\Big(\frac{r^2K_1^2}{(2r-p)p}\Big)^{(1-\beta)/\beta}\Big]$$

主要的是第二项，因此它不超过

$$M(p,\ C,\ K_1,\ |\Omega|)r^{\frac{1}{\beta}}$$

所以存在常数 $M(p,\ c,\ K_1,\ |\Omega|)>0$，使

$0<m\leqslant p$ 时

$$U_{\sigma(r)r}\leqslant M^{\frac{1}{\sigma(r)r}}r^{\frac{1}{\beta\sigma(r)r}}U_r^{\frac{2}{\sigma(r)}} \tag{25}$$

及 $m>p$ 时

$$U_{2r}\leqslant M^{\frac{1}{2r}}r^{\frac{1}{2\beta r}}U_r \tag{26}$$

下面以式(25)为例，用迭代法可得

$$U_\delta\leqslant M^{\lambda_1}C(r)U_r^{\lambda_2} \tag{27}$$

其中

$$\delta=2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)\longrightarrow+\infty\qquad(\nu\longrightarrow+\infty)$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)}+\frac{1}{2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1)}\times\frac{2(2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1))}{2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2r-(p-m)}\times\frac{2(2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1))}{2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)}\cdots\frac{2(2r-(p-m))}{2^2r-(p-m)(2^2-1)}$$

$$=\frac{1+2+\cdots+2^\nu}{2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)}$$

$$\longrightarrow\frac{1}{r-(p-m)}=\delta_1\qquad(\nu\longrightarrow+\infty)$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.   http://www.cnki.net

$$\lambda_2=\frac{2(2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1))}{2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)}\times\frac{2(2^{\nu-1}r-(p-m)(2^{\nu-1}-1))}{2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1)}\cdots\frac{2r}{2r-(p-m)}$$

$$=\frac{2^{\nu+1}r}{2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)}$$

$$\longrightarrow\frac{r}{r-(p-m)}=\delta_2\qquad(\nu\longrightarrow+\infty)$$

$$c(r)=(2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1))^{\frac{1}{\beta(2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1))}}$$

$$\times\ (2^{\nu-1}r-(p-m)(2^{\nu-1}-1))^{\frac{1}{\beta(2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1))}\times\frac{2(2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1))}{2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)}}$$

$$\cdots r^{\frac{1}{\beta(2r-(p-m))}\times\frac{2(2^\nu r-(p-m)(2^\nu-1))}{2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1)}\cdots\frac{2(2r-(p-m))}{2^2r-(p-m)(2^2-1)}}$$

$$\leqslant(2^\nu r)^{\frac{1}{\beta(2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1))}}(2^{\nu-1}r)^{\frac{2}{\beta(2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1))}}$$

$$\cdots r^{\frac{2^\nu}{\beta(2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1))}}$$

$$=2^{\lambda_3}r^{\lambda_4}$$

其中

$$\lambda_3=\frac{1}{\beta(2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1))}(\nu+2(\nu-1)+\cdots+2^\nu)$$

$$<\frac{1}{\beta(r-(p-m))}\times\frac{\nu+2(\nu-1)+\cdots+2^\nu}{2^{\nu+1}}$$

当 $\nu\to+\infty$ 时收敛。

$$\lambda_4=\frac{1+2+\cdots+2^\nu}{\beta(2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1))}=\frac{2^{\nu+1}-1}{\beta(2^{\nu+1}r-(p-m)(2^{\nu+1}-1))}$$

$$\to\frac{1}{\beta(r-(p-m))}\qquad(\nu\to+\infty)$$

设

$$\lim_{\nu\to+\infty}C(r)=K(r)$$

因此在式(27)中，令 $\nu\to+\infty$ 便得

$$\sup_{t\geq 0}\|u(\cdot,\ t)\|_\infty\leqslant M^{\delta_1}k(r)U_r^{\delta_2}.$$

引理证完。据此，为完成定理第(1)个论断的证明，只需证 $\sup_{t\geq 0}\int_\Omega u^{p+m}dx$ 一致有界。

为此，将方程(16)乘 u^p，在 Ω 积分得

$$\frac{1}{p+m}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{p+m}dx+p^2\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2dx=\int_\Omega u^{2p}dx$$

设 $w=u^p$，则 $u=w^{\frac{1}{p}}$，并由式(23)，有

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{1}{p+m}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^{1+\frac{m}{p}}dx+\int_\Omega|\nabla w|^2dx=\int_\Omega w^2dx$$

$$\leqslant c^2|\Omega|^{\frac{2}{n}}\int_\Omega|\nabla w|^2dx.$$

因 $0<C<1$，所以，当 $|\Omega|\leqslant 1$ 时，有

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{p+m}dx=\frac{d}{dt}\int_\Omega w^{1+\frac{m}{p}}dx\leqslant 0$$

从而

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_\Omega u^{p+m}dx\leqslant U_0{}^{p+m}|\Omega|$$

至于定理 3 的第(2)部分，结论是明显的。

由定理 3 和定理 1 即得

推论　设 $u_0(x)>0$，那么，当 $|\Omega|\leqslant 1$ 时，存在某个 ε_0，使

$$\phi'(u_0(x))[\nabla(\phi(u_0(x))+\phi(u_0(x))]\geqslant\varepsilon_0\phi(u_0(x))\tag{28}$$

满足的初值 $u_0(x)$ 是不存在的。

事实上，如果存在某个 ε_0 使式(28)成立，那么定理 1 的条件全部满足，因此由定理1得

$$n_t\geqslant\frac{\varepsilon_0\phi(u)}{\phi'(u)}=\frac{\varepsilon_0}{p}u$$

由此推得与定理 3 的 $u(x,t)$ 一致有界矛盾。

参 考 文 献

〔1〕Weissler, F.B., Single Point Blow-up for a Semilinear Initial Value Problem, J. Differential Equations, 55 (1984), 191—224.

〔2〕Weissler, F.B., An L^∞ Blow-up Estimate for a Nonlinear Heat Equations, Comm. Pure Appl. Math. 35 (1985), 291—295.

〔3〕Giga, Y., Kohn, R.V., Asymptotially Self-Similar Blow-up of Semilinear Heat Equations, Comm. Pure Appl. Math.38 (1985), 297—319.

〔4〕Friedman, A., Mcleod, B., Blow-up of Positive Solutions of Semilinear Heat Equations, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), 425—447.

〔5〕John, F., Lower Bound for the Life Span of Solutions of Nonlinear Wave Equation in Three Dimensions, Comm. Pure Appl. Math., 36 (1981), 1—35.

〔6〕Caffavelli, L. A., Friedman, A., Differentiability of the Blow-up Curve for One Dimensional Nonlinear Wave Equations, Arch. Rational Mech. Anal. 91 (1985), 83—98.

〔7〕Levine, H.A., Sack, P.E., Some Existence and Nonexistence Theorems for Solutions of Degenerate Parabolie Equations, J. Differential Equations, 52 (1984), 135—161.

〔8〕Morro, A., Straughan, B., Highly Unstble Solutions to Completely Nonlinear Diffusion Problems, Nonlinar Anal. 7 (1983), 231—237.

〔9〕Gilbarg, D., Trudinger, N.S., Elliptic Partial Differential Equations of Seconder,

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

SPringer-Verlag, (1977).

〔10〕 Rothe, F., Uniform Bounds from Bounded L^p-Functionals in Reaction-Diffusion Equations, J.Differential Equations, 45(1982), 207—233.

〔11〕 Ladywenckaia, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'ceva, N.A., Linear and Quasi-Linear Equations of Paradolic Type, Amer.Math.Soc., (1968).

The Blow-up and Uniform Boundness for the Solutions of Degenerate Reaction-Diffusion Equations

Liang Xuexin Wu Zaide

Abstract

On the basis of maximum principle, this paper discusses the blow-up in finite time for the solutions of nonlinear boundary value problem of degenerate reaction-diffusion equations; and estimates the upper bound of blow-up rate of the solutions; and demonstrates that in the case of symmetric domain there is a single blow-up point; and finally, it considers the solutions of initial boundary value problem, under certain assumption, to be global uniformly bounded which is independent of time.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net