

准线性化技术在求解热传导问题中的应用

杨 翔 翔

(化工与生化工程系)

摘 要

在工程学和物理学的问题中,经常会遇到非线性两点边值问题.在多数情况下,这类问题是很难求解的.本文研究了准线性化技术求解这类问题的数值方法.

准线性化技术具有单调性和二次方收敛两个重要的性质,是牛顿-拉伐森近似方法的直接推论.应用这个技术时,即使对于一个很粗略的初始近似值,也能非常迅速地收敛到正确的答案上.因此,它是求解非线性边值问题的有效方法.

本文以热特性参数可变时环形肋片的热传导问题为例,阐述此法的具体应用.

一、引 言

在工程和物理学科中,经常遇到两点或多点边值问题,这类问题多半属于非线性.例如,当研究变截面环形肋片的传热问题时^[1],由于涉及热特性参数变化,因而其控制微分方程式为非线性,具有一个已知的初值和一个已知的终值条件,称为两点边值问题或非线性边值问题.对于这类问题,无论在理论上或数值计算上都很难求解,原因是初值条件一般没有全部给出,不能应用龙格-库塔法直接计算.为了获得另外一个下落不明的边值条件,常需采用试差法或牛顿-拉伐森迭代法求解,这不仅需要花费很长的计算时间,而且还要求所假设的初始条件必须十分接近正确的数值.因此,如何进行线性化就成为求解这类问题的关键.

准线性化技术是由 Bellman 和 Kalaba 发展起来的,尔后又有许多人应用该技术求解在化学工程、机械工程和其他学科所遇到的非线性微分方程问题^[2-7].在许多方面,准线性化技术本质上是一个通用化函数方程的牛顿-拉伐森方法.然而,我们所要求解的是一个未知的函数而不是一个固定的数值,因此无论在计算上或理论上都显得更加复杂.

准线性化技术不仅线性化非线性方程,而且还提供一系列的近似函数,该函数一般地迅速收敛到原始非线性方程的解上.在实用上,后者是更为重要的性质,只要对未知函数假设一个粗略的初始近似值,便可以导致原始微分方程的解.一般说,这个粗略的初始近似值可以凭工程经验或直观上获得.

本文1986年10月25日收到.

• 本文在美国堪萨斯州立大学完成.原为英文,由翁荣周付教授译成中文并经作者校对.

二、准线性化技术

考虑二阶非线性常微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x''(t) = f(x(t), t) \quad (1)$$

具有边界条件

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1, \quad x(t_f) = c_2, \\ 0 &\leq t \leq t_f \end{aligned} \quad (2)$$

此处 x 是 t 的函数, 而函数 f 是函数 $x(t)$ 的函数。首先适当地选择函数 $x(t)$ 的初始近似值, 称之为 $x_0(t)$ 。要注意的是这里我们选择的是一个函数, 而不是单一的数值。这个近似函数可以通过各种不同方法获得, 但对于许多问题来说, 最方便的是让 $x_0(t) = c_1$, $0 \leq t \leq t_f$ 。应用泰勒公式将函数 f 在 $x_0(x)$ 附近展开, 忽略二阶及高阶项后得

$$f(x(t), t) = f(x_0(t), t) + (x(t) - x_0(t))f_{x_0}(x_0(t), t) \quad (3)$$

式中, f_{x_0} 表示函数 f 对于 x_0 的偏微分。联合式(1)和式(3)得到求解 $x(t)$ 的方程

$$x''(t) = f_{x_0}(x_0(t), t) + [f(x_0(t), t) - f_{x_0}(x_0(t), t)x_0(t)] \quad (4)$$

由于 $x_0(t)$ 是 t 的已知函数, 因此式(4)是一个具有可变系数的准线性化微分方程, 此方程式在边界条件(2)下的解称为 $x_1(t)$, 由于 $x_1(t)$ 是已知函数, 因此式(4)可以在 $x_1(t)$ 附近展开, 于是得到求解 $x_2(t)$ 的方程, 如此循环下去, 便得到由 x_n 求解 x_{n+1} 的迭代方程

$$x''_{n+1}(t) = f(x_n(t), t) + [x_{n+1}(t) - x_n(t)]f_{x_n}(x_n(t), t) \quad (5)$$

式中, $x_n(t)$ 是已知函数, 可以从前面的迭代方程中求得, 而 $x_{n+1}(t)$ 则是未知函数。式(5)是一个准线性化微分方程式, 其边界条件仍同式(2)。尽管式(5)是线性的, 但它的系数不是常数, 而是随着独立变量 t 而变化。一般说, 式(5)是很难用理论方法求解。然而, 它可以用各种数值方法获得近似解。

现在, 准线性化技术可以延伸到更为一般的情况, 即考虑具有 M 个边界条件的 M 阶非线性微分方程的线性化问题, 设该方程是

$$x^M = g(x, x', \dots, x^{M-1}, t) \quad (6)$$

令

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad \dots, \quad x_M = x^{M-1} \quad (7)$$

那末, 式(6)可以转化为下列 M 个一阶常微分方程组

$$\begin{aligned} x'_M &= g(x_1, x_2, \dots, x_M, t) \\ x'_{M-1} &= x_M \\ &\vdots \\ x'_2 &= x_3 \\ x'_1 &= x_2 \end{aligned} \quad (8)$$

或简写成

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x_1, x_2, \dots, x_M, t) \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq t_f$$

式(9)具有 M 个给定的边界条件, 其中有些可能是初值条件, 其余的则是终值条件, 假设有 m 个终值条件

$$x_j(t_f) = x_{jt_f}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (10a)$$

有 $(M-m)$ 个初值条件

$$x_k(0) = x_{k0}, \quad k = m+1, \dots, M \quad (10b)$$

由于式(6)是非线性的, 所以式(9)也是非线性的, 因此式(9)必须首先在 x_0 点附近线性化。如果采用向量的形式, 这个线性化方程可以写成

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{g}(\bar{x}, t) \quad (11)$$

式中 \bar{x} 和 \bar{g} 表示 M 维向量, 其分量分别是 x_1, x_2, \dots, x_M 和 g_1, g_2, \dots, g_M 。现在选择初始近似值 $x_{1,0}(t), x_{2,0}(t), \dots, x_{M,0}(t)$ 对应于函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)$ 。而函数 g_1, g_2, \dots, g_M 可以在这些初始近似值附近展开, 当略去二阶及高阶微量后, 可得如下向量方程

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{g}(\bar{x}, t) = \bar{g}(\bar{x}_0, t) + J(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad (12)$$

式中, $J(\bar{x}_0)$ 是雅可比(Jacobi)矩阵

$$J(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{2,0}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{M,0}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial g_2}{\partial x_{2,0}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{M,0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial x_{1,0}} & \frac{\partial g_M}{\partial x_{2,0}} & \dots & \frac{\partial g_M}{\partial x_{M,0}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

由于 $x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{M,0}$ 是已知函数, 故式(12)是一个线性微分方程, 边界条件仍然是式(10)。式(12)、(13)可以使用像龙格-库塔方法那样的逐步积分法对 \bar{x} 求解, 得 \bar{x}_1 。现在 \bar{x}_1 是已知函数, g_1, g_2, \dots, g_M 可以在 \bar{x}_1 附近展开, 重复同样的步骤可以求得 \bar{x}_2 , 如此反复进行下去直到所要求的精确达到为止。这样可得如下迭代方程

$$\frac{d\bar{x}_{n+1}}{dt} = \bar{g}(\bar{x}_n, t) + J(\bar{x}_n)(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) \quad (14)$$

或将式(14)展开为

$$\frac{dx_{i,n+1}}{dt} = g_i(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{M,n}, t) \\ + (x_{1,n+1} - x_{1,n}) \frac{\partial g_i}{\partial x_{1,n}} + \dots$$

$$+ (x_{M,n+1} - x_{M,n}) \frac{\partial g_i}{\partial x_{M,n}} \quad (15)$$

这里 $i=1, 2, \dots, M$ 和 $n=0, 1, 2, \dots, n$. 注意, $x_{i,n}$ 是已知函数, 它由前面的迭代计算中求得, 而 $x_{i,n+1}$ 则是未知函数, 式(15)的边界条件是

$$x_{j,n+1}(t_f) = x_{j,t_f}, \quad j=1, 2, \dots, m \quad (16a)$$

$$x_{k,n+1}(0) = x_{k0}, \quad k=m+1, \dots, M \quad (16b)$$

方程式(15)和(16)的解是^[8]

$$x_i(t) = x_{ip}(t) + \sum_{L=1}^m A_L x_{i,L}(t) \quad (17)$$

$$i=1, 2, \dots, M$$

式中, $x_{ip}(t)$ 是方程组的特解, $x_{i,L}(t)$ 是方程组的齐次解, 而 A_L 是积分常数.

下面来确定这些特解和齐次解. 通常选择原微分方程的初值作为特解. 即

$$\begin{aligned} x_{k,n+1}(0) &= x_{kp}(0) = x_{k0} \\ k &= m+1, m+2, \dots, M \end{aligned} \quad (18)$$

而且, $(M-m)$ 个齐次解, 初值满足下列条件

$$\begin{aligned} \sum_{L=1}^m A_L x_{k,L}(0) &= 0 \\ k &= m+1, m+2, \dots, M \\ L &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (19)$$

此条件的用意在于使方程式(17)的左右两项在初值上相互协调, 即

$$x_i(0) = x_{ip}(0) + \sum_{L=1}^m A_L x_{i,L}(0) \quad (20)$$

$$i=m+1, m+2, \dots, M$$

显然, 由于初值条件经过如此适当的选择, 在 M 个齐次解 $x_{i,L}(t)$ 中只有 m 个是必需的, 而 m 个积分常数 A_L 可从给定的 m 个终值条件式(16)来确定. 其余的 m 个特解 $x_{i,p}(0)$ 可由下列矩阵不为零的条件任意选定.

$$\begin{bmatrix} x_{1,1h}(0) & x_{1,2h}(0) & \cdots & x_{1,mh}(0) \\ x_{2,1h}(0) & x_{2,2h}(0) & \cdots & x_{2,mh}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M,1h}(0) & x_{M,2h}(0) & \cdots & x_{M,mh}(0) \end{bmatrix} \quad (21)$$

由此, 一阶线性常微分方程式(15)、(16)可用龙格-库塔逐步积分法求解. 对于绝大多数问题, 一个非常粗糙的初始近似值便可满足收敛条件. 由此得到的特解和齐次解可以叠加以便最终求得问题的通解.

三、应 用

为了说明准线性化技术的实际应用, 现以热特性参数可变时环形肋片的传热为例, 应用

准线性化技术计算矩形截面环肋的温度分布, 以及沿肋片径向长度上的温度梯度。其控制微分方程式^[1]

$$(1 + \alpha\theta) \frac{d^2\theta}{dR^2} + \alpha \left(\frac{d\theta}{dR} \right)^2 + \frac{(1 + \alpha\theta)}{(R + D_b)} \frac{d\theta}{dR} - N^2 f(R) \theta = 0 \quad (22)$$

式中, θ 是无因次温度, $\theta = (t - t_\infty) / (t_b - t_\infty)$, t 是肋片的温度, t_b 是肋片根部的温度, t_∞ 是周围环境的温度, R 是无因次半径, $R = (r - r_b) / (r_o - r_b)$, r 是肋片的径向距离, r_b 是肋片的根部半径, r_o 是肋片的端部半径, α 是导热系数变化参数, D_b 是无因次参数, $D_b = r_b / (r_o - r_b)$, $f(R)$ 是描写放热系数变化的函数, N 是无因次肋片参数, $N^2 = h_a(r_o - r_b)^2 / k_a b$, h_a 是平均放热系数, k_a 是参考的导热系数, b 是肋片根部的半厚度。

令

$$\theta = \theta_1 \quad (23a)$$

$$\frac{d\theta}{dR} = \frac{d\theta_1}{dR} = \theta_2 \quad (23b)$$

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} = \frac{d^2\theta_1}{dR^2} = \frac{d\theta_2}{dR} \quad (23c)$$

因此, 式(22)可转化为两个一阶的微分方程式

$$\frac{d\theta_1}{dR} = \theta_2 \quad (24a)$$

$$(1 + \alpha\theta) \frac{d\theta_2}{dR} + \alpha\theta_2^2 + \frac{(1 + \alpha\theta_1)}{(R + D_b)} \theta_2 - N^2 f(R) \theta_1 = 0 \quad (24b)$$

此时边界条件变成

$$\theta_1(0) = 1 \quad \text{当 } R = 0 \text{ 时} \quad (25a)$$

$$\theta_2(1) = 0 \quad \text{当 } R = 1 \text{ 时} \quad (25b)$$

其次, 上述一阶非线性微分方程式需要加以线性化, 为此目的, 重写式(24b) 为更一般化的形式

$$\frac{d\theta_1}{dR} = \theta_2 = g_1(R, \theta_1, \theta_2) \quad (26a)$$

$$\frac{d\theta_2}{dR} = \frac{N^2 f(R) \theta_1 - \alpha \theta_2^2}{(1 + \alpha \theta_1)} - \frac{\theta_2}{(R + D_b)} = g_2(R, \theta_1, \theta_2) \quad (26b)$$

由此

$$\frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} = 0 \quad (27a)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} = 1 \quad (27b)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} = \frac{N^2 f(R) + \alpha^2 \theta_2^2}{(1 + \alpha \theta_1)^2} \quad (28a)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} = \frac{-2\alpha\theta_2}{(1+\alpha\theta_1)} - \frac{1}{(R+D_b)} \quad (28b)$$

在这个问题中,雅可比矩阵是

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{N^2 f(R) + \alpha^2 \theta_2^2}{(1+\alpha\theta_1)^2} & \frac{-2\alpha\theta_2}{(1+\alpha\theta_1)} - \frac{1}{(R+D_b)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

这样如上节所述,我们可以得到求解 θ 的 $(n+1)$ 次的近似迭代方程式

$$\frac{d\theta_{1,n+1}}{dR} = \theta_{2,n+1} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{2,n+1}}{dR} = & \frac{N^2 f(R)\theta_{1,n} - \alpha\theta_{2,n}^2}{(1+\alpha\theta_{1,n})} \\ & + (\theta_{1,n+1} - \theta_{1,n}) \left[\frac{N^2 f(R) + \alpha^2 \theta_{2,n}^2}{(1+\alpha\theta_{1,n})^2} \right] \\ & - (\theta_{2,n+1} - \theta_{2,n}) \left[\frac{2\alpha\theta_{2,n}}{(1+\alpha\theta_{1,n})} \right] - \frac{\theta_{2,n+1}}{(R+D_b)} \end{aligned} \quad (30b)$$

给定的边界条件是

$$\theta_{1,n+1}(0) = 1 \quad (31)$$

$$\theta_{2,n+1}(1) = 0$$

式(30)和(31)解的形式是

$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1p,n+1} + A_1 \theta_{1,1h,n+1} + A_2 \theta_{1,2h,n+1} \quad (32a)$$

$$\theta_{2,n+1} = \theta_{2p,n+1} + A_1 \theta_{2,1h,n+1} + A_2 \theta_{2,2h,n+1} \quad (32b)$$

如前所述,当适当地选择特解和齐次解的初值条件时,上式可简化为

$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1p,n+1} + A_1 \theta_{1,1h,n+1} \quad (33a)$$

$$\theta_{2,n+1} = \theta_{2p,n+1} + A_1 \theta_{2,1h,n+1} \quad (33b)$$

下面来确定这些特解和齐次解。首先选择原微分方程式的初值条件,作为特解的初值条件,即

$$\theta_{1p,n+1}(0) = \theta_{1,n+1}(0) = 1 \quad (34)$$

同样,齐次解的初值条件必须满足式(19),因此

$$\theta_{1,1h,n+1}(0) = 0 \quad (35)$$

对于另一个特解 $\theta_{2p,n+1}(0)$ 和齐次解 $\theta_{2,1h,n+1}(0)$ 的初值条件可用下列矩阵不为零的条件任意选定

$$\begin{bmatrix} \theta_{1,1h}(0) \\ \theta_{2,1h}(0) \end{bmatrix}$$

下列数值在计算中可以任意选定

$$\theta_{2p,n+1}(0) = 0 \quad (36a)$$

$$\theta_{2,1h,n+1}(0) = 1 \quad (36b)$$

至于积分常数 A_1 可由一个给定的终值条件 $\theta_{2,p,n+1}(1) = 0$ 确定。由此从式 (33), 在 $R=1$ 处可得到

$$A_1 = \frac{-\theta_{2,p,n+1}(0)}{\theta_{2,1h,n+1}(1)} \quad (37)$$

这样, 当给出边界条件 $\theta_{1,0}(R) = 1$ 和 $\theta_{2,0}(R) = 0$ 并且假设一个初始近似值时, 便可以开始对方程 (30) 进行迭代计算过程。

本文编制了计算机框图和计算机程序, 计算机运算所得结果将另文讨论。限于篇幅, 此处只列出计算机框图如图 1 所示。

参 考 文 献

- 〔1〕 杨翔翔, 热特性参数可变时变截面环肋的传热研究, 华侨大学学报, 7, 3(1986)。
- 〔2〕 Lee, E. Stanley, Quasilinearization and Invariant Imbedding, with Applications to Chemical Engineering and Adaptive Control Academic Press, (1968)。
- 〔3〕 Netrakanti, M.N., Study of Heat Transfer in Circular Fins with Variable Thermal Parameters, A Master's Thesis, KSU, Manhattan, Kansas, (1983)。
- 〔4〕 Lee, E.S., Quasilinearization, Nonlinear Boundary Value Problems and Optimization, Chemical Engineering Science, 21, (1966), 183-194。
- 〔5〕 Roberts, S.M. and Shipman, J.S., Two-Point Boundary Value Problems, Shooting Methods, American Elsevier Publishing Company, (1972)。
- 〔6〕 Lee, E. S., Reduction in Dimensionality, Dynamic Programming and Quasilinearization, Special Report Number 79, Kansas Engineering Experiment Station, Manhattan, Kansas, (1967)。
- 〔7〕 Bellman, R. and Wing, G.M., An Introduction to invariant imbedding, Wiley-Interscience Publication, (1975)。
- 〔8〕 Lee, E.S., Chen, S.S., Fan, L.T., Hwang, C.L., Application of Quasilinearization to the Solution of Nonlinear Differential Equations, Kansas Engineering Experiment Station, Manhattan, Kansas, Special Report 78, July(1967)。

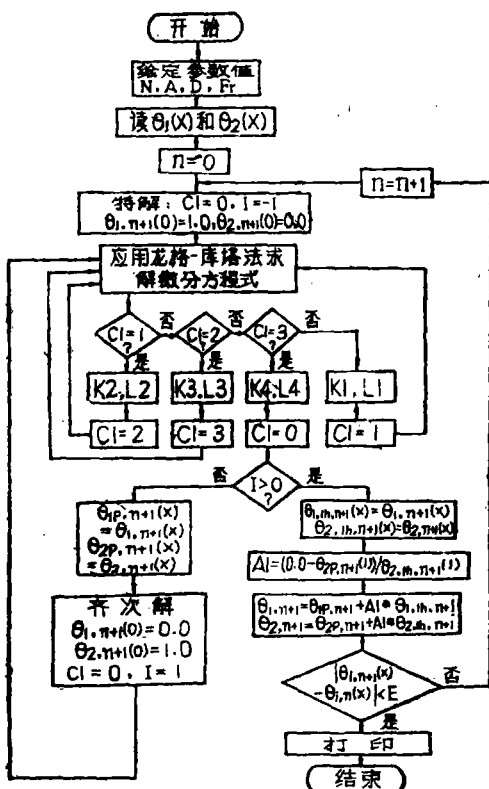


图 1

Application of Quasilinearization Technique for Solving a Heat Conduction Problem

Yang Xiangxiang

Abstract

In the field of physical sciences and engineering, the two-point nonlinear boundary value problem is a subtle and difficult problem which is not quite suited for computer. However, this paper uses quasilinearization technique to obtain a numerical solution of boundary value problems.

The quasilinearization technique possesses two important properties: quadratic convergence and monotonicity. It is an immediate consequence of the use of Newton-Raphson method of approximation. It converges even the very rough initial approximation. Therefore, it is the most effective technique up to now for solving a nonlinear boundary value problem.

As a good example for the application of quasilinearization, this paper gives a numerical solution of heat conduction in a circular fin with variable thermal parameters.