

框架结点转动的差分解

王全凤

(土木工程系)

摘 要

本文用差分法求解在考虑框架柱轴向变形时, 相邻结点的转动对该结点转动的影响系数, 结果表明, 参考文献〔2〕建议的近似表达式虽可接受, 但与有限单元法结果比较是非常粗略的.

一、问题的提出及框架结点方程的建立

用连续介质法考虑框架柱轴向变形对高层框-剪结构的内力和变形的影响时, 需要考虑相邻框架结点转动对该结点转动的影响<sup>〔1〕</sup>. 文〔2〕直接给出了考虑相邻结点转动的近似公式, 若结点的转动

$$\varphi \approx - \frac{1}{6i_b + i_c} M_o \tag{1}$$

式中,  $M_o$  为框架梁梁端有某一个相对沉降值时, 该梁端的固端弯矩;  $i_b$  为框架梁的线刚度;  $i_c$  为框架柱的线刚度.

从而给出了考虑相邻结点转动对该转动的影响系数

$$k \approx \frac{1}{1 + \frac{6i_b}{i_c}} \tag{2}$$

本文用差分法直接计算相邻结点转动对该结点转动的影响. 考虑有一个  $(m + 1)$  层的对称框架(图 1). 当框架边柱在受拉或压轴向变形时, 由于框架梁梁端沉降不同引起了反对称的垂直荷载, 在这种情况下, 框架柱剪力等于零. 图 2 给出了框架内部结点转动单位角时的弯矩图. 假设在结点  $j$  的框架梁梁端有一个产生固端弯矩为  $M_o$  的相对沉降, 从第一楼层到第  $(m + 1)$  楼层结点转动分别用  $\varphi_0$  到  $\varphi_m$  表示, 则框架的结点方程如下:

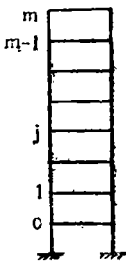


图 1

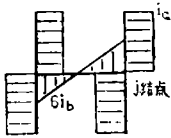


图 2

本文1986年4月11日收到.

$$\begin{cases} (6ib + 2ic)\varphi_0 - ic\varphi_1 = 0 \\ -ic\varphi_{n-1} + (6ib + 2ic)\varphi_n - ic\varphi_{n+1} = 0, \quad n \text{ 从 } 1 \text{ 到 } (j-1) \\ -ic\varphi_{n-1} + (6ib + 2ic)\varphi_n - ic\varphi_{n+1} + M_o = 0, \quad n \text{ 从 } j \text{ 到 } (m-1) \\ -ic\varphi_{m-1} + (6ib + ic)\varphi_m + M_o = 0 \end{cases} \quad (3)$$

## 二、框架结点方程的差分方程

上述方程实质上是一个三项常系数线性差分方程,我们先讨论下面一般三项常系数线性差分方程的解。

$$ay_{n-1} + by_n + cy_{n+1} = P_n \quad (4)$$

当系数  $a = c$  时,可表示成下面对称型的形式

$$y_{n-1} + 2b'y_n + y_{n+1} = P'_n \quad (5)$$

方程(4)的解为齐次方程的通解和关于  $P_n$  的非齐次方程特解相加组成。

$$y_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n + y_n^* \quad (6)$$

式中

$$y_n^* = \frac{P_n}{a + b + c}$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$k_1, k_2$ ——待定系数,由边界条件来确定。

当差分方程为对称型时,其解表示为

$$y_n = k_1 r^n + k_2 r^{m-n} + y_n^*, \quad n = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

若  $j = m$ , 则框架结点方程(3)的齐次解

$$\varphi_n = k_1 r^n + k_2 r^{m-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m$$

式中

$$r = \frac{(3ib + ic) - \sqrt{(3ib + ic)^2 - ic^2}}{ic^2}$$

对高层框架来说,楼层数  $(m+1)$  是个比较大的数,若取  $r$  为小于 1 值,则  $r^m$  和  $r^{m-1}$  可近似取为零,则由边界条件可得

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -\frac{M_o}{6ib + ic - icr} \end{cases}$$

若  $1 < j < m$  时,框架结点方程(3)的解

$$\varphi_n = \begin{cases} k_{11} r^n + k_{22} r^{m-n}, & n = 0, 1, 2, \dots, j-1 \\ k_{33} r^n + k_{44} r^{m-n} - \frac{M_o}{6ib}, & n = j, j+1, \dots, m \end{cases} \quad (8)$$

利用下列的边界条件

$$\begin{cases} (6ib + 2ic)\varphi_0 - ic\varphi_1 = 0 \\ -ic\varphi_{j-2} + (6ib + 2ic)\varphi_{j-1} - ic\varphi_j = 0 \\ -ic\varphi_{j-1} + (6ib + 2ic)\varphi_j - ic\varphi_{j+1} + M_o = 0 \\ -ic\varphi_{m-1} + (6ib + ic)\varphi_m + M_o = 0 \end{cases} \quad (9)$$

可定上述诸系数

$$\begin{cases} k_{11} = 0 \\ k_{33} = + \frac{ic}{r^j(6ib + 3ic - icr)} \times \frac{M_o}{6ib} \\ k_{22} = - \frac{ic}{r^{m-j+1}(6ib + 3ic - icr)} \times \frac{M_o}{6ib} \\ k_{44} = 0 \end{cases}$$

若  $j = 1$  时, 差分方程解为

$$\varphi_n = k_3 r^n + k_4 r^{m-n} - \frac{M_o}{6ib} \quad n = 0, 1, \dots, m \quad (10)$$

式中,  $k_3, k_4$  可由边界条件定为

$$\begin{cases} k_3 = - \frac{1 + ic/6ib}{6ib + 2ic - icr} M_o \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

若  $j = 0$ , 则框架结点方程为

$$\begin{cases} (6ib + 2ic)\varphi_0 - ic\varphi_1 + M_o = 0 \\ -ic\varphi_{n-1} + (6ib + 2ic)\varphi_n - ic\varphi_{n+1} + M_o = 0 \\ n = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ -ic\varphi_{m-1} + (6ib + ic)\varphi_m + M_o = 0 \end{cases} \quad (11)$$

其解为

$$\varphi_n = k_5 r^n + k_6 r^{m-n} - \frac{M_o}{6ib} \quad n = 0, 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} k_5 = \frac{1}{(6ib + 2ic - icr)} \cdot \frac{ic}{6ib} \cdot M_o \\ k_6 = 0 \end{cases}$$

### 三、计算实例

图1, 设  $m = 13$ , 即为十四层框架, 梁线刚度为2139KN-m, 柱线刚度为11430KN-m, 由于框架梁端不均匀沉降引起各结点转动的差分解如表1所示。

表 1

结 点 弯 矩 $\varphi \times (-10^{-4} M_0)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	7.4757	7.1207	6.6482	6.1111	5.5616	5.0076	4.452	3.8959	3.3398	2.7842	2.2302	1.6807	1.1436	0.5565

框架结点平均转动

$$\varphi = -4.1434 \times 10^{-4} M_0$$

框架梁端弯矩

$$M = 6i_0 \varphi + M_0 = 0.4682 M_0$$

即

$$k = 0.4682$$

表 2 比较用三种不同方法算出结果。

表 2

方 法	参考文献〔2〕近似式	差 分 法	有 限 元 法
$\varphi \times (-10^{-4} M_0)$	4.1211 (17.1%)	4.1434 (16.7%)	4.9715
k	0.4711 (30.2%)	0.4682 (29.4%)	0.3619

表中括号数值分别为与有限单元法结果相对差值的百分比。从表中可以看到，文〔2〕建议近似表达式算出结果与差分法比较是可以接受，但和有限单元法比较差值比较大。

参 考 文 献

- 〔1〕王全凤，框架柱轴向变形对剪力墙最优刚度的影响，第三届高层建筑国际会议论文集，（香港），12（1984），640—646。
- 〔2〕Антонов, К.К., Проектирование Железобетон Конструкции (Пример Расчета), (1966)。
- 〔3〕小幡守，最新建築構造力学，森北出版株式会社，（东京），（1978）。

## Calculating the Rotation of certain Joints of Frame by Difference Method

Wang Quanfeng

### Abstract

For certain joints of a frame, the effect of the rotation of adjacent joints on its rotation is studied in this paper. Taking the axial deformation of frame columns into account, the influence coefficient is calculated by difference method. The results reveal that the approximate expression suggested by reference [2] is acceptable, and it is merely a sketch as compared with that obtained by finite element method.