

钢筋混凝土构件有限元弹塑性分析(Ⅰ)

构件裂缝的随机性分析

陈忠汉

(土木工程系)

摘 要

钢筋混凝土构件的弹塑性分析中,混凝土的力学状态,尤其是混凝土裂缝的开展明显影响着钢筋混凝土构件的强度和变形.鉴于混凝土材料的非均质多相结构和各组成成分位置、性能的随机性,可认为其裂缝开展在本质上带有随机性.本文应用随机序列的分析方法,建立了裂缝开展的随机数学模型,并应用于实际分析.

一、前 言

在人类建筑史上,采用砖瓦砂石之类非金属材料比金属材料早得多,但是对这些至今还被广泛应用的建筑材料,包括较晚开始应用(十九世纪中叶)的混凝土等材料性能的研究都远远不及金属材料.

钢筋混凝土结构是目前最常见的结构型式.钢筋混凝土结构构件中,混凝土的力学行为对整个构件的受力-变形性能有着重要的影响,但它的内部构成比钢筋复杂得多.因此,对混凝土材料力学性能的深入研究是钢筋混凝土结构分析理论化的必要前提.

据有关研究资料〔1〕表明,硬化后的混凝土是由粗集料、砂、水泥凝胶等至少九种以上成分组成的多相材料,而且各成分的局部结构也相当复杂,由此产生了混凝土受力破坏机理分析的复杂性.

试验研究表明,结构混凝土的受力破坏,不管处于什么应力状态都与混凝土裂缝情况直接有关,进而钢筋混凝土的破坏几乎可以毫无例外地定义为混凝土内部不稳定裂缝发展的最后阶段.尽管微裂缝的存在对混凝土在低应力状态下的变形性能有较大影响,但在极限状态下的构件强度更多地受到宏观裂缝的影响.本文的分析对象是由微裂缝发展、贯通而成的宏观裂缝,这些裂缝把结构混凝土分割为边缘极不平整的块体.这时,其部分内力要通过块体

本文1986年6月17日收到.

间的相互作用(如咬合力等)和钢筋之间的粘结作用来传递。开裂后,钢筋、混凝土的应力、应变状态都要产生重分布现象,而这一变化与混凝土裂缝的形式是密切相关的。

国内外学者为了探明裂缝的影响作了大量的研究^[2~5]。预先假定混凝土内部孔隙的随机分布形式所进行的裂缝统计研究取得了有益的成果^[3],但目前只能在定性上起到一些作用。为了得出定量结果,有的在构件分析中引入预先设定的裂缝^[4];最近又通过断裂力学方法作了大量工作^[6]。然而,在实际分析中更多按均质假定由主应力(或主应变)方向来确定其开裂方向,这样处理显然与实际试验结果有较大差别。

本文应用对随机事件的处理方法,建立了裂缝开展形式的随机模型,用于有限元方法,使分析更接近实际,这对于进一步查明钢筋混凝土构件的破坏机理和提高分析的有效性都是有益的。

二、模型分析

工程实际中的许多现象,由于各种未知(或难以事先预测)因素的影响,在发展过程中往往呈现出随机性。若以其主要因素为指标,通常可以用一个系列的相应参数——数据序列来反映变化状况,随机的数据序列又称作随机序列(当序列的取样是以时间间隔为参数时又称作时间序列)。

随机序列分析是概率统计学的一个重要分支,由样本分析确定其随机模型后,可对随机事件进行预报、模拟与控制等,这一方法已首先在工业自动化、气象分析以及军事科学等领域内得到了应用。

虽然裂缝发展是极不规则的,但试验观察和理论分析均表明,开裂还是受到一定条件的制约的。首先,宏观开裂的总趋势是受内部应力状态较大影响的。另一方面,因为宏观裂缝是由微裂缝发展贯通而成的,同时由于混凝土初期的泌水现象,使集料与水泥浆之间产生不完全粘结。因此,裂缝主要是沿着粗集料界面或穿过水泥凝胶体而开展,如图 1 所示,很少穿过集料而开展。

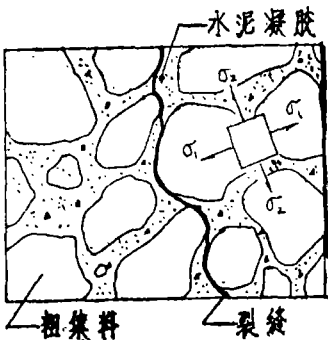


图 1 混凝土裂缝

因此,裂缝的开展途径主要与构件内部的主拉应力方向以及集料情况(其中包括形状、大小及其相对位置)有关。很明显,后者的影响是难以预测的,是随机的。

通过试验可以连续测定裂缝开展中的某一参数,各阶参数的集合就是一个数据序列,或者是一个样本。本文以单位高度 Δ_i 内试件表现裂缝的倾角差 α_i 的正切函数值为单个样本值 x_i ,由此可得到随机序列的样本值

$$\begin{aligned} \{x\} &= x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n \\ x_i &= \tan(\alpha_i) \end{aligned} \tag{1}$$

由随机序列谱分解理论可知^[6]: 一个具有有理谱密度的正态、平稳、零均值的随机序列,总可用一个自动回归滑动平均模型——ARMA(p, q)来拟合

$$\begin{aligned}\omega_t &= \varphi_1 \omega_{t-1} - \dots - \varphi_p \omega_{t-p} \\ &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \\ (t &= \dots, -1, 0, 1, \dots)\end{aligned}\quad (2)$$

式中, ω_t 为随机序列的某变量样本值; a_t 为白噪声; φ 、 θ 为待定系数; p 、 q 分别为自回归阶数及滑动平均阶数。

这一模型要求随机序列是平稳的, 零均值的。由试验采集来的未经处理的序列, 只有在纯弯区段能较好符合这一要求。对于同时承受弯矩与剪力影响的试件, 其序列具有趋势性, 故还需先进行零均值化处理。

根据前文分析, 钢筋混凝土构件的开裂形式主要是由主拉应力及集料情况决定的。由均质假设分析得出的主应力迹线是一条光滑曲线, 实际的开裂则是在附近波动的复杂折线, 结合零均值化处理而给出的新序列, 可以反映实际开裂偏离其理论分析值的情况。经比较可找到一指数曲线, 使下式成立:

$$\sum_{j=1}^n y_j = 0 \quad (3)$$

$$y_j = x_j - x_{ej}$$

式中, x_j 为原样本序列; y_j 为新样本序列; x_{ej} 为相应指数曲线取值 ($x_{ej} = \alpha_j^k$)。

这一新的样本序列就是模型识别的依据。模型识别的主要任务是寻找一种与实际序列尽可能“等价”的自回归滑动平均模型, 即 ARMA(p , q) 序列, 作为实际序列的近似模型。具体地, 也就是确定序列模型的形状, 求得自回归阶数 p 和平均滑动的阶数 q 。

根据 ARMA 序列自相关函数以及偏相关函数的性质, 即可初步确定模型的阶数: 若样本自相关函数 \hat{r}_k 在 $k > q$ 以后截尾, 则可判断为 MA(0 , q) 序列; 若 $\hat{\phi}_{kk}$ 在 $k > p$ 以后截尾, 则可判断为 AR(p , 0) 序列; 如果两者均不截尾, 又被负指数型的数列所控制 (即为拖尾), 则需用混合模型 ARMA(p , q)。根据文献[6], 样本的自相关函数以及偏相关函数可由下式计算

$$\hat{r}_k = \hat{r}_{-k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} y_i y_{i+k} \quad k=0, 1, \dots, (N-1) \quad (4)$$

$$\hat{\rho}_k = \hat{\rho}_{-k} = \frac{\hat{r}_k}{\hat{r}_0} \quad k=0, 1, \dots, (N-1) \quad (5)$$

式中, \hat{r}_k 为 y_j 的样本自协方差; N 为样本长度; \hat{r}_k 为样本自相关函数。

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1 \\ \hat{\phi}_{k+1, k+1} = \left(\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \hat{\rho}_{k+1-j} \hat{\phi}_{kj} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^k \hat{\rho}_j \hat{\phi}_{kj} \right)^{-1} \\ \hat{\phi}_{k+1, j} = \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1, k+1} \hat{\phi}_{kj}, \quad k-(j-1) \\ j=1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\hat{\phi}_{k+1, k+1}$ 为样本偏相关函数。

由上述公式递推计算得到的样本自相关与偏相关函数值如图2所示, $\hat{\rho}_k$ 在 $k > 1$ 后明显表现出截尾性质, 而 $\hat{\phi}_{kk}$ 则是具有拖尾性, 如图2所示。

据此, 可采用一阶平均滑动模型 $MA(0, 1)$ 来拟合原序列

$$a_k = a_k - \theta_1 a_{k-1} \tag{7}$$

为证实所建立的模型应具有的较好拟合程度, 通常还需要对初步识别的模型进行检验。本文采用基于假设检验理论的自相关函数检验法。这一方法的检验准则是: 若模型拟合得较好, 则由建立的模型以及数据序列所反算的 a_k 就应充分接近白噪声。

对于一般的 $ARMA(p, q)$ 模型

$$a_k = \theta^{-1}(B)\varphi(B)\omega_k \tag{8}$$

由此, 即可从数据序列求得其“残量”样本值

$$a_{Q-1}, a_{Q-2}, \dots, a_n \quad (Q = p + d)$$

令

$$\hat{r}_k(r, a) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} a_j a_{j+k} \tag{9}$$

$$\hat{\rho}_k(n, a) = \hat{r}_k(n, a) / \hat{r}_0(n, a) \tag{10}$$

则有 $(\sqrt{n} \hat{\rho}_1(n, a), \sqrt{n} \hat{\rho}_2(n, a), \dots, \sqrt{n} \hat{\rho}_k(n, a))$ 近似为相互独立的正态 $N(0, 1)$ 的随机变量。

若令

$$Q_k = \sum_{k=1}^K [\sqrt{n} \hat{\rho}_k(n, a)]^2 = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2(n, a) \tag{11}$$

这时, 只要 Q_k 值符合自由度为 k 的中心 χ^2 分布, 即可肯定“ a_k 为白噪声”的原假设。若取显著性水平 $\alpha = 0.05$, $k = 21$, 查表得出的 $\chi^2_{k,\alpha}$ 值为 32.7, 而计算得出的 $Q_k = 9.862 < \chi^2_{k,\alpha}$, 据此可认为模型拟合程度是较好的。

三、实例分析

前文^[7]已讨论了有限元法在钢筋混凝土构件分析中的应用, 本文主要讨论裂缝开展的随机模型的建立及其在有限元分析中的具体应用。以往的有限元分析中, 较多地视单元性质为

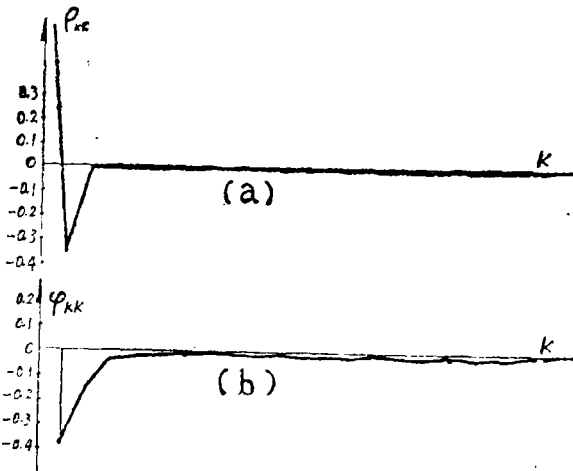


图2 序列样本的相关函数

各向同性的,即单元积分点主拉应力超过混凝土的抗拉强度时,便规定该子区间沿垂直于主拉应力方向开裂。

试验观察表明^[6],微裂缝贯通而形成的宏观裂缝主要是沿着集料界面而开展的,但是界面上因不完全粘结而形成的初始裂缝的分布与受力以后的主应力方向是无关的。

换句话说,裂缝在大多数情况下并不沿着主应力方向发展,如图3所示,往往有一定的偏差。如图中的 $\theta_1, \theta_{i+1}, \theta_{i+2}, \dots$,引起这些偏差的主要因素是粗集料的排列和形状,这些因素是随机的。因此,这些偏差量也是随机的,上述MA(0,1)模型就是描述这一随机偏差量的数学模型。均质假设下的构件内部主应力方向用有限元方法是不难求出的,经过数学模型给出的偏差量的修正,即可得出更符合实际情况的裂缝开展途经,亦改善了分析的可靠性。

另一方面实测裂缝是条状的,而不是成片的。因为材料的理论强度远大于实测的开裂强度,然而由于裂缝端部的应力集中的作用,材料才在远低于理论强度的低应力状态下开裂,所以宏观裂缝通常是连续的。因此,分析中混凝土的开裂除了满足应力条件,还需满足连续条件按修正后的方向发展。

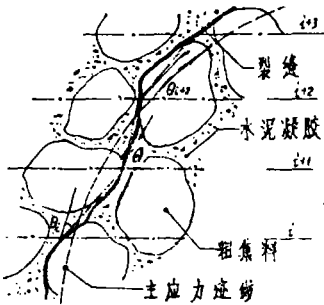


图3 裂缝的偏差角(θ_i)

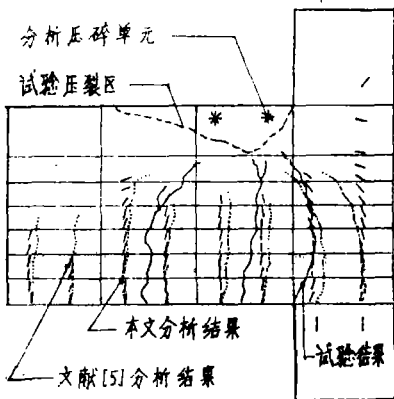


图5 开裂分析结果的比较

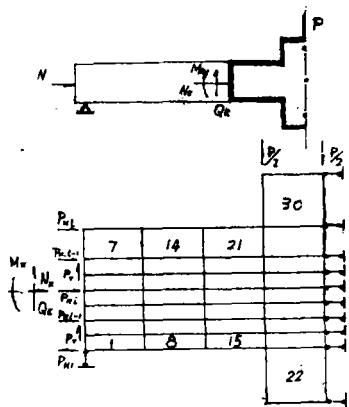


图4 分析实例的单元划分

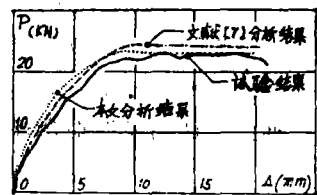


图6 P- Δ 分析结果的比较

按上述原则,本文作了实例分析,单元划分如图4所示。因结构是对称的,只需取一半作分析。另按前文^[7]简化方法可仅取端部作详细的划分。 N 为轴向力, P 为横向荷载,采取

分级加荷方案, 分析结果所表明的裂缝开展形式以及 P (荷载)- Δ (位移) 关系如图 5, 6 所示, 与前文^[7] 结果相比有所改善。

四、结 语

本文应用随机序列分析方法建立了钢筋混凝土构件开裂的数学模型, 并直接应用于此类构件的有限元分析中, 这一方法与其它处理混凝土开裂的方法相比更合理更简便。分析结果也得到改善。这为较好解决有限元分析中的裂缝形式问题提供了可行的途径。但这仍是初步的探讨, 还需作进一步的研究, 诸如非主拉应力方向开裂的裂面剪力抵抗、裂面效应以及模型对材料特性、受力特性的敏感程度等, 仍需在大量分析试验后逐步予以探明。

参 考 文 献

- [1] 岩崎训明著, 尹家辛、李景星译, 混凝土的特性, 中国建筑工业出版社, (1980)。
- [2] 水利水电科学研究院, 混凝土的强度和破坏译文集, 水利出版社, (1982)。
- [3] 徐积善, 强度理论及其应用, 水利电力出版社, (1984)。
- [4] 野口博、井上范夫, 用有限元法分析钢筋混凝土结构抗剪的方法, 钢筋混凝土结构抗剪分析学术会议报告论文集, (1982)。
- [5] Willam, K.J., Experimental and Computational Aspects of Concrete Fracture, Proceedings of the International Conference On Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Yugoslavia, (1984)。
- [6] 安鸿志等, 时间序列的分析与应用, 科学出版社, (1983)。
- [7] 陈忠汉, 钢筋混凝土构件有限元弹塑性分析 (I) 钢筋混凝土柱的非线性分析, 华侨大学学报, 3 (1986)。
- [8] 陈忠汉、朱伯龙、钮宏, 斜向受力钢筋混凝土压弯构件的非线性分析, 土木工程学报, 4 (1984)。

The Finite Element Elasto-plastic Analysis of Reinforced Concrete Members (II) Random Analysis for the Crack

Chen Zhonghan

Abstract

In the elasto-plastic analysis of reinforced concrete members, the mechanical behaviour of concrete, in particular the growth of cracks, reveal a significant in-

fluence on the strength and deformation of the member. In view of the irregular heterogeneous structure of the concrete as well as the randomness of position and quality of its every component parts, the randomness of the growth of cracks may be considered.

In this paper, an analytical method of random sequence is applied to form a random mathematical model for the crack, which can be used successfully in the practical analysis of the member.