

一类椭圆型Euler方程非凡解的存在性*

梁汉廷

(中山大学)

摘 要

本文应用翻山引理证明一类椭圆型Euler方程非凡解的存在性, 这类方程的 $F_u(x, u, \xi)$ 的结构条件关于 u 的增长阶比 $(q-1)$ 大, 这里 $q < q$, 后者是Sobolev嵌入定理的临界指数.

设 G 是 n 维欧氏空间 E^n 中的有界域, G 的边界记为 ∂G . 设 $n \geq 3$, $1 < p < n$. $W_0^{1,p}(G)$ 是通常的Sobolev空间, 其中函数在Sobolev意义下满足边界条件

$$u|_{\partial G} = 0$$

又 $W_0^{1,p}(G)$ 中的范数取为

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(G)} = \left(\int_G |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \quad |\nabla u|^2 = \left(\sum_{i=1}^n u_{,i}^2 \right), \quad u_{,a} = \frac{\partial u}{\partial x^a}$$

设

$$I(u) = \int_G F(x, u, \nabla u) dx \quad (1)$$

对 $u \in W_0^{1,p}(G)$ 有定义. 最近在文 [1] 中, 沈尧天研究了泛函 $I(u)$ 的Euler方程的广义解, 即方程

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_G (F_u(x, u, \nabla u) \varphi_{,a} + F_\xi(x, u, \nabla u) \varphi) dx = 0 \quad (2)$$

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(G)$$

的广义解 $u \in W_0^{1,p}(G)$ 的存在性, 其中 $I'(u)$ 是泛函 $I(u)$ 的Fréchet导数

$$F_u(x, u, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi^a} F(x, u, \xi), \quad F_\xi(x, u, \xi) = \frac{\partial}{\partial u} F(x, u, \xi) \text{ 并且重复的希腊指}$$

标表示由 1 到 n 求和. 在关于 F 的适当假定下, 文 [1] 中利用翻山引理证明了方程 (2) 的非凡广义解 $u \in W_0^{1,p}(G)$ 存在.

在文 [2] 中, 讨论了方程

本文1986年5月22日收到.

* 研究计划由中山大学高等学术研究中心基金会资助.

$$-\Delta u = P(x, u)$$

的解 $u \in \dot{W}^1_p(G)$ 的存在性, 其中设

$$|P(x, u)| \leq a_1 + a_2 \varphi(|u|)$$

a_1, a_2 是正的常数, $\varphi(|u|)$ 是其自变量的非负单增的连续函数, 它可以比通常假设的幂函数 $|u|^{\tilde{p}}$ ($\tilde{p} < \frac{n+2}{n-2}$) 有更快的增长, 但增长阶仍低于 Sobolev 临界指数 $\frac{n+2}{n-2}$, 即满足

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{|u|^{\tilde{p}}}{\varphi(|u|)} = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(|u|)}{|u|^{\frac{n+2}{n-2}}} = 0$$

其中 $\tilde{p} < \frac{n+2}{n-2}$ 为任意.

现在本文重新考虑方程 (2), 我们所作关于 $F_u(x, u, \xi)$ 的假定中要求 u 的增长可比 $|u|^{\tilde{q}-1}$ ($\tilde{q} < \frac{n\tilde{p}}{n-\tilde{p}}$ 为任意) 有更快的增长 (当然 $F_u(x, u, \xi)$ 关于 u 的增长阶仍要求低于 Sobolev 临界指数). 所得结果叙述为如下的

定理 设 $F(x, u, \xi)$, $F_u(x, u, \xi)$, $F_\alpha(x, u, \xi)$ 和 $F_{\alpha\beta}(x, u, \xi) = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta}$ $F(x, u, \xi)$ 分别为在 $G \times E^1 \times E^n$ 定义且满足 Carathéodory 条件*. 此外设下面的结构条件满足:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & F_{\alpha\beta}(x, u, \xi) \eta^\alpha \eta^\beta \geq \chi_0 |\xi|^{p-2} |\eta|^2, \text{ 当 } p \geq 2 \\ & F_{\alpha\beta}(x, u, \xi) \eta^\alpha \eta^\beta \geq \chi_0 (1 + |\xi|)^{p-2} |\eta|^2, \text{ 当 } 1 < p < 2 \\ & \forall \xi, \eta \in E^n, x \in G \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad F_\alpha(x, u, \xi) \xi^\alpha \geq \lambda_0 |\xi|^{p-C} |u|^{\tilde{q}}$$

$$\text{(iii)} \quad \left(\sum_i |F_\alpha(x, u, \xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_1 |\xi|^{p-1} + c |u|^{\tilde{q}/p'}$$

$$\text{(iv)} \quad |F_u(x, u, \xi)| \leq C |\xi|^{\tilde{p}/\tilde{q}'} + \lambda_2 \varphi(|u|)$$

$$\text{(v)} \quad -F_u(x, u, \xi) u \geq \mu \varphi(|u|) |u| - \varepsilon |\xi|^p - K(\varepsilon) |u|, \text{ 当 } |u| + |\xi| \geq k_0$$

其中在 (i)–(v) 中出现的 $\chi_0, \lambda_i (i=0, 1, 2), c, \mu$ 和 $k_0 > 0$ 是常数, $\varepsilon > 0$ 可为任意实数, $K(\varepsilon) > 0$ 为依赖于 ε 的常数, 又 p', \tilde{q} 和 \tilde{q}' 为常数, 分别满足

$$p < \tilde{q} < q = \frac{n\tilde{p}}{n-\tilde{p}}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \quad \frac{1}{\tilde{q}'} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$$

$\varphi(t)$ 为在 $t \geq 0$ 定义的非负单增的连续函数, 满足:

$$\text{当 } t \rightarrow 0 \text{ 时, } \varphi(t) = o(t^{p-1}) \quad (3)$$

$$\text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi(t)/t^{q-1} \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$t^{\tilde{q}-1}/\varphi(t) \rightarrow 0 \text{ (对一切 } \tilde{q} < q) \quad (5)$$

* 函数 $f(x, u, \xi)$ 称为满足 Carathéodory 条件, 如果固定 x , f 是 u, ξ 的连续函数, 固定 u, ξ , f 是 x 的可测函数.

$$\int_0^t \varphi(s) ds \geq \gamma t \varphi(t), \quad \gamma \in (0, 1) \text{ 为常数} \quad (6)$$

那么, 如果

$$\frac{\mu}{\lambda_2} > \frac{p}{q} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) = \left(1 - \frac{p}{n} \right) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \quad (7)$$

方程(2)存在非凡解 $u \in W^1_1(G)$.

注: 结构条件(ii), (iii)和(iv)分别换为下面的条件(ii)', (iii)'和(iv)'时, 定理的断言仍旧成立, 并且证明无本质的不同.

$$(ii)' \quad F_\alpha(x, u, \xi) \xi^\alpha \geq \lambda_0 |\xi|^p - c_0(x) |u|^{\bar{q}}$$

$$(iii)' \quad |F_\alpha(x, u, \xi)| \leq \lambda_1 |\xi|^{p-1} + c_1(x) |u|^{\bar{q}/p'}$$

$$(iv)' \quad |F_u(x, u, \xi)| \leq c_2(x) |\xi|^{p/\bar{q}'} + \lambda_2 \varphi(|u|)$$

其中在(ii)'—(iv)'中函数 $c_i(x)$ ($i=0, 1, 2$) 为在 G 定义的非负可测函数, 并分别满足

$$c_0(x) \in L_{r_0}(G), \quad 0 < \frac{1}{r_0} < 1 - \frac{\bar{q}}{q}$$

$$c_1(x) \in L_{r_1}(G), \quad 0 < \frac{1}{r_1} < \frac{1}{p'} \left(1 - \frac{\bar{q}}{q} \right) = \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{\bar{q}}{q} \right)$$

$$c_2(x) \in L_{r_2}(G), \quad 0 < \frac{1}{r_2} < \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{q}$$

对定理的证明要利用下述周知的

翻山引理 设 E 是一个 Banach 空间, Ψ 是 E^1 上的 C^1 泛函, 满足 $P \cdot S \cdot$ 条件. 设 U 是 E 中 $u=0$ 的一个开邻域, 如果存在常数 $\rho > 0$ 和某个 $v: E \ni v \in U$, 使

$$\Psi(0) < \rho, \quad \Psi(v) < \rho \quad (8)$$

$$\Psi(u) \Big|_{u \in \partial U} \geq \rho \quad (9)$$

又设

$$c = \inf_{p \in P} \max_{u \in p} \Psi(u) \quad (\geq \rho)$$

其中 P 是 E 中联结 0 和 v 的连续路径的集合那么 c 是泛函 Ψ 的一个临界值, 亦即存在 $u \in E$ 使

$$\Psi(u) = c \quad (\text{这隐含 } u \neq 0) \quad (10)$$

$$\Psi'(u) = 0 \quad (11)$$

证明定理的主要困难在于验证所考虑的泛函满足 $P \cdot S \cdot$ 条件. 我们下面的证明中并没有利用 Orlicz 空间 N -函数的理论, 与文 [2] 相比, 我们验证 $P \cdot S \cdot$ 条件所作的推导更加初等 (文 [2] 中利用 N -函数的性质来证明对应的泛函满足 $P \cdot S \cdot$ 条件). 又相应于本文式 (40) 在文 [1] 中没有给出推导 (文 [1] 中的论证在本应引用文式 (5) 的地方, 误引用了该文的式 (4)).

证明 命

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \varphi(t) dt, \quad (12)$$

根据Sobolev嵌入定理, $\dot{W}_q^1(G) \subset L_q(G)$, 所以由式(4)可得

$$\int_0^{|u|} \Phi(u) dx < \infty, \quad u \in \dot{W}_q^1(G)$$

其次, 设 $0 < q < q$, 由于式(5), 当取 k 充分大并且 $|u| > k$ 时, 成立

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \varphi(t) dt \leq \int_0^{|u|} t^{q-1} \frac{\varphi(t)}{t^{q-1}} dt \leq \frac{\varphi(|u|)}{|u|^{q-1}} \int_0^{|u|} t^{q-1} dt$$

由此即得 $q\Phi(u) \leq |u| \varphi(|u|)$, $0 < q < q$, 当 $|u| > k$ (13)

此外, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $k = k(\varepsilon)$ 充分大, 由式(5), 式(6)即得

$$\begin{aligned} \int_G |u|^{\tilde{q}} dx &= \int_{G \cap \{|u| > k\}} |u|^{\tilde{q}} \frac{\Phi(u)}{\varphi(|u|)} dx + \int_{G \cap \{|u| \leq k\}} |u|^{\tilde{q}} dx \\ &\leq \varepsilon \int_G \Phi(u) dx + c(\varepsilon) \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $c(\varepsilon) > 0$ 为依赖于 ε 的常数。

取 $E = \dot{W}_q^1(G)$, E 中 $u = 0$ 的开邻域 U 取为

$$U = U_r = \{u \in \dot{W}_q^1(G) \mid \|u\|_{\dot{W}_q^1(G)} < r\}$$

其中 $r > 0$ 为待定常数。我们下面要作的是验证翻山引理对由式(1)定义的泛函 $I(u)$ 适用。那么, 由翻山引理, 知存在 $0 \neq u \in \dot{W}_q^1(G)$ 使

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_G (F_\sigma(x, u, \nabla u) \varphi_\sigma + F_u(x, u, \nabla u) \varphi) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \dot{W}_q^1(G)$$

亦即 $u \in \dot{W}_q^1(G)$ 是方程(2)的非凡解。

下面逐项验证翻山引理中的条件成立。首先验证条件(8)。不妨设

$$F(x, 0, 0) = 0$$

由此立即有

$$I(0) = 0 < \rho \quad \text{对任何 } \rho > 0$$

其次

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_G F(x, u, \nabla u) dx = \int_G \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, tu, t \nabla u) dt dx \\ &= \int_G \int_0^1 (F_\sigma(x, tu, t \nabla u) u_\sigma + F_u(x, tu, t \nabla u) u) dt dx \end{aligned} \quad (15)$$

由于结构条件(iii)和式(14), 我们有

$$\begin{aligned} &\int_G \int_0^1 |F_\sigma(x, tu, t \nabla u) u_\sigma| dt dx \\ &\leq \int_G \int_0^1 (\lambda_1 |t| \|\nabla u\|^p + c |tu|^{\tilde{q}/p'} |t| \|\nabla u\|) \frac{dt}{t} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\lambda_1 + \varepsilon}{p} \int_G |\nabla u|^p dx + C(\varepsilon) \int_G |u|^q dx \\
&\leq \frac{\lambda_1 + \varepsilon}{p} \int_G |\nabla u|^p dx + \varepsilon \int_G \Phi(u) dx + c(\varepsilon) \\
&\quad (\varepsilon > 0 \text{ 为任意})
\end{aligned}$$

另一方面, 记

$$G_0 = G \cap \{|u| + |\nabla u| > k_0\}$$

利用结构条件(v), 成立

$$\begin{aligned}
&\int_G \int_0^t (-F_u(x, tu, t\nabla u)u) dt dx \\
&\geq \int_{G_0} \int_0^t \left(\mu |tu| \varphi(|tu|) - \varepsilon |t| |\nabla u|^p - K(\varepsilon) |tu| \right) \frac{dt}{t} dx \\
&\quad - \int_{G \setminus G_0} \int_0^t |F_u(x, tu, t\nabla u)u| dt dx \\
&\geq \int_{G_0} \left(\mu \Phi(u) - \frac{\varepsilon}{p} |\nabla u|^p - K(\varepsilon) |u| \right) dx - C(k_0) \\
&\geq \int_G \left(\mu \Phi(u) - \frac{\varepsilon}{p} |\nabla u|^p - K(\varepsilon) |u| \right) dx - \int_{G \setminus G_0} \mu \Phi(u) dx - C(k_0) \\
&= \int_G \left(\mu \Phi(u) - \frac{\varepsilon}{p} |\nabla u|^p - K(\varepsilon) |u| \right) dx - C(k_0)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
I(u) &\leq \int_G \int_0^1 \left[F_u(x, tu, t\nabla u)u, u \right] - \left(-F_u(x, tu, t\nabla u)u \right) dt dx \\
&\leq \frac{\lambda_1 + 2\varepsilon}{p} \int_G |\nabla u|^p dx - (\mu - \varepsilon) \int_G \Phi(u) dx + K(\varepsilon) \int_G |u| dx + C(\varepsilon)
\end{aligned}$$

用 tu 代 u , 利用 $1 < p < q$ 和条件式(5), 式(6), 由上式给出

$$I(tu) \leq \frac{\lambda_1 + 2\varepsilon}{p} t^p \int_G |\nabla u|^p dx - (\mu - \varepsilon) \int_G \Phi(tu) dx + K(\varepsilon) t \int_G |u| dx + C(\varepsilon) \rightarrow -\infty$$

当 $t \rightarrow +\infty$

这隐含了条件式(8)成立。

下面证条件式(9)成立。为此我们注意, 条件式(3)、式(4)隐含了对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C(\varepsilon) > 0$, 使

$$\varphi(t) \leq \varepsilon t^{p-1} + C(\varepsilon) t^{q-1}, \quad (16)$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_G \Phi(u) dx &\leq \int_G |u| \varphi(|u|) dx \leq \varepsilon \int_G |u|^p dx + C(\varepsilon) \int_G |u|^q dx \\
&\leq \varepsilon C \|u\|_{\dot{W}_1^1(G)}^p + C(\varepsilon) \|u\|_{\dot{W}_1^1(G)}^q \\
&\quad \forall u \in \dot{W}_1^1(G)
\end{aligned} \quad (17)$$

由于结构条件(ii)、(iv)和式(17)

$$\begin{aligned}
 I(u) &\geq \int_G \int_0^1 (F_\alpha(x, tu, t \nabla u) u_\alpha - |F_u(x, tu, t \nabla u) u|) dt dx \\
 &\geq \int_G \int_0^1 [\lambda_0 |t| |\nabla u|^p - C |tu| \bar{q} - |tu| (C |t| |\nabla u|^{p/p'} + \lambda_2 \varphi(|tu|))] \frac{dt}{t} dx \\
 &\geq \int_G \frac{\lambda_0 - \varepsilon}{p} |\nabla u|^p dx - C(\varepsilon) \int_G |u| \bar{q} dx - \lambda_2 \int_G \Phi(u) dx \\
 &\geq \frac{\lambda_0 - \varepsilon}{p} \|u\|_{\dot{W}^1_1(G)}^p - C(\varepsilon) \|u\|_{\dot{W}^1_1(G)}^{\bar{q}} \\
 &\quad - \lambda_2 (\varepsilon C \|u\|_{\dot{W}^1_1(G)}^p + c(\varepsilon) \|u\|_{\dot{W}^1_1(G)}^q) \quad (18) \\
 &\quad \varepsilon > 0 \text{ 为任意, } u \in \dot{W}^1_1(G)
 \end{aligned}$$

现在固定 $\varepsilon > 0$ 充分小, 然后取 $r > 0$ 充分小, 可使

$$\begin{aligned}
 I(u) \Big|_{\partial U} &= I(u) \Big|_{\|u\|_{\dot{W}^1_1(G)} = r} = r \\
 &\geq \frac{\lambda_0 - \varepsilon}{p} r^p - C(\varepsilon) r^{\bar{q}} - \lambda_2 (\varepsilon C r^p + C(\varepsilon) r^q) = \rho > 0
 \end{aligned}$$

亦即条件式(9)成立.

下面验证泛函 $I(u)$ 满足 $P \cdot S \cdot$ 条件. 为此设 $\{u_m\} \subset \dot{W}^1_1(G)$, 使

$$|I(u_m)| \leq M \quad (19)$$

$$\langle I'(u_m), \varphi \rangle = o(1), \quad \forall \varphi \in \dot{W}^1_1(G), \quad \|\varphi\|_{\dot{W}^1_1(G)} = 1 \quad (20)$$

我们要证在 $\{u_m\}$ 中找到子列在 $\dot{W}^1_1(G)$ 中强收敛. 为此我们先证 $\{u_m\}$ 在 $\dot{W}^1_1(G)$ 为有界. 联合式(18)、(19)和式(14), 即得

$$M \geq I(u_m) \geq \frac{\lambda_0 - \varepsilon}{p} \int_G |\nabla u_m|^p dx - (\lambda_2 + \varepsilon) \int_G \Phi(u_m) dx - C(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \text{ 为任意.} \quad (21)$$

取 $\varphi = u_m / \|u_m\|_{\dot{W}^1_1(G)}$, 代入式(20)给出

$$\begin{aligned}
 o(1) \|u_m\|_{\dot{W}^1_1(G)} &= \int_G (F_\alpha(x, u_m, \nabla u_m) u_{m,\alpha} + F_u(x, u_m, \nabla u_m) u_m) dx \\
 &\leq \int_G |F_\alpha(x, u_m, \nabla u_m) u_{m,\alpha}| dx - \int_G F_u(x, u_m, \nabla u_m) u_m dx \quad (22)
 \end{aligned}$$

由于式(14)和结构条件(iii)

$$\begin{aligned}
 \int_G |F_\alpha(x, u_m, \nabla u_m) u_{m,\alpha}| dx &\leq \int_G (\lambda_1 |\nabla u_m|^p + C |u_m|^{\bar{q}/p'} |\nabla u_m|) dx \\
 &\leq (\lambda_1 + \varepsilon) \int_G |\nabla u_m|^p dx + C(\varepsilon) \int_G |u_m|^{\bar{q}} dx \\
 &\leq (\lambda_1 + \varepsilon) \int_G |\nabla u_m|^p dx + \varepsilon \int_G \Phi(u_m) dx + C(\varepsilon) \quad (23)
 \end{aligned}$$

取定常数 $k \geq k_0$ 充分大, 简写

$$G_k = G \cap \{|u_m| + |\nabla u_m| > k\}, \quad G'_k = G \setminus G_k$$

利用结构条件(iv)、(v)和式(13)取其中 q 为 $(q-\varepsilon)$ 可证

$$\begin{aligned}
 & \int_G -F_u(x, u_m, \nabla u_m) u_m dx = \int_{G_k} + \int_{G_k'} \\
 & \geq \int_{G_k} (\mu |u_m| \varphi(|u_m|) - \varepsilon |\nabla u_m|^p - K(\varepsilon) |u_m|) dx - \int_{G_k'} |F_u(x, u_m, \nabla u_m) u_m| dx \\
 & \geq \int_{G_k} (\mu(q-\varepsilon)\Phi(u_m) - \varepsilon |\nabla u_m|^p - K(\varepsilon) |u_m|) dx - \int_{G_k'} |F_u(x, u_m, \nabla u_m) u_m| dx \\
 & \geq \int_G (\mu(q-\varepsilon)\Phi(u_m) - \varepsilon |\nabla u_m|^p - K(\varepsilon) |u_m|) dx \\
 & \quad - \int_{G_k'} \mu(q-\varepsilon)\Phi(u_m) dx - \int_{G_k'} |F_u(x, u_m, \nabla u_m) u_m| dx \\
 & \geq \int_G (\mu(q-\varepsilon)\Phi(u_m) - \varepsilon |\nabla u_m|^p - K(\varepsilon) |u_m|) dx - C(k)
 \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为任意, $C(k) > 0$ 为不依赖于 ε 的常数. 联合式(22)、(23)和式(24), 给出

$$\begin{aligned}
 o(1) \|u_m\|_{\dot{W}_1^1(G)} & \leq (\lambda_1 + 2\varepsilon) \int_G |\nabla u_m|^p dx - (\mu(q-\varepsilon) - \varepsilon) \int_G \Phi(u_m) dx \\
 & \quad + K(\varepsilon) \int_G |u_m| dx + C(\varepsilon)
 \end{aligned} \quad (25)$$

从式(21)、(25)中消去 $\int_G |\nabla u_m|^p dx$, 我们得

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\mu(q-\varepsilon) - \varepsilon}{\lambda_1 + 2\varepsilon} - (\lambda_2 + \varepsilon) \left(\frac{p}{\lambda_0 - \varepsilon} \right) \right] \int_G \Phi(u_m) dx \\
 & \leq M \left(\frac{1}{\lambda_0 - \varepsilon} \right) + o(1) \|u_m\|_{\dot{W}_1^1(G)} + K(\varepsilon) \int_G |u_m| dx + C(\varepsilon)
 \end{aligned} \quad (26)$$

由于假定式(7), 只要 $\varepsilon > 0$ 取得充分小, 可使

$$\frac{\mu(q-\varepsilon) - \varepsilon}{\lambda_1 + 2\varepsilon} - (\lambda_2 + \varepsilon) \left(\frac{p}{\lambda_0 - \varepsilon} \right) > 0$$

于是由式(26)得

$$\int_G \Phi(u_m) dx \leq o(1) \|u_m\|_{\dot{W}_1^1(G)} + O(1) \left(\int_G |u_m| dx + 1 \right)$$

将它代入式(21)继续得

$$\int_G |\nabla u_m|^p dx \leq O(1)$$

亦即 $\{u_m\}$ 在 $\dot{W}_1^1(G)$ 中为有界.

进一步地根据结构条件(iii)、(iv)

$$F_\alpha(x, u_m, \nabla u_m) \text{ 和 } F_u(x, u_m, \nabla u_m)$$

分别在 $L_{p'}(G)$ 和 $L_{q'}(G)$ 中为有界($\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}$). 于是可选出 $\{u_m\}$ 的子列, 仍记为 $\{u_m\}$, 使

$$\begin{cases} \text{弱} \\ u_m \longrightarrow u \in \dot{W}_1^1(G) & \text{在 } \dot{W}_1^1(G) \\ F_\alpha(x, u_m, \nabla u_m) \xrightarrow{\text{弱}} A_\alpha(x) & \text{在 } L_{p'}(G) \\ F_u(x, u_m, \nabla u_m) \xrightarrow{\text{弱}} A(x) & \text{在 } L_{q'}(G) \end{cases} \quad (27)$$

进一步地

$$\begin{aligned} & \text{弱} \\ & u_m \rightharpoonup u \quad \text{在 } L_q(G) \\ & \text{强} \\ & u_m \Rightarrow u \quad \text{在 } L_{\tilde{q}}(G), \tilde{q} < q \end{aligned} \quad (28)$$

借助Holder不等式及 u_m 在 $\dot{W}^1_1(G)$ 的有界性, 易见

$$\int_G |\nabla u_m|^{p/\tilde{q}'} |u_m - u| dx \rightarrow 0 \quad \text{当 } m \rightarrow \infty \quad (29)$$

下面证明当 $m \rightarrow \infty$ 时

$$I_m = \int_G (F_\alpha(x, u_m, \nabla u_m) - F_\alpha(x, u_m, \nabla u))(u_m - u)_\alpha dx \rightarrow 0 \quad (30)$$

事实上对任意 $\delta > 0$, 可以找到闭集 $G_\delta \subset G$

$$\text{mes}(G \setminus G_\delta) < \delta$$

使得在 G_δ 上 $u_m, F_\alpha(x, u_m, \nabla u)$ 分别一致收敛于 u 和 $F_\alpha(x, u, \nabla u)$. 考虑到 u_m 在 $\dot{W}^1_1(G)$ 中有界, 因此对固定的 $\delta > 0$, 我们有

$$\int_{G_\delta} (F_\alpha(x, u_m, \nabla u) - F_\alpha(x, u, \nabla u))(u_m - u)_\alpha dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty \quad (31)$$

又因为 u_m 在 $\dot{W}^1_1(G)$ 中弱收敛于 u , 所以

$$\int_G F_\alpha(x, u, \nabla u)(u_m - u)_\alpha dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty \quad (32)$$

$$\int_{G \setminus G_\delta} F_\alpha(x, u, \nabla u)(u_m - u)_\alpha dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty \quad (32)$$

利用结构条件(iii)并借助Holder不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{G \setminus G_\delta} F_\alpha(x, u_m, \nabla u)(u_m - u)_\alpha dx \right| & \leq \int_{G \setminus G_\delta} (\lambda_1 |\nabla u|^{p-1} + C |u_m|^{\tilde{q}/p'}) |\nabla(u_m - u)| dx \\ & \leq \lambda_1 \left(\int_{G \setminus G_\delta} |\nabla u|^p dx \right)^{1-1/p} \left(\int_G |\nabla(u_m - u)|^p dx \right)^{1/p} \\ & \quad + C \left(\int_{G \setminus G_\delta} |u_m|^{\tilde{q}} dx \right)^{1-1/p} \left(\int_G |\nabla(u_m - u)|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq (\|u_m\|_{\dot{W}^1_1(G)} + \|u\|_{\dot{W}^1_1(G)}) \{ \lambda_1 \left(\int_{G \setminus G_\delta} |\nabla u|^p dx \right)^{1-1/p} \\ & \quad + C \left(\int_{G \setminus G_\delta} 2^{\tilde{q}-1} (|u_m - u|^{\tilde{q}} + |u|^{\tilde{q}}) dx \right)^{1-1/p} \}. \end{aligned}$$

根据式(28)以及Lebesgue积分的绝对连续性, 只要一开始 $\delta > 0$ 取得充分小且 m 充分大, 可使

$$\left| \int_{G \setminus G_\delta} F_\alpha(x, u_m, \nabla u)(u_m - u)_\alpha dx \right| < \varepsilon \quad (34)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 可为任何预先给定的数. 联合式(31)~式(34), 即见 $m \rightarrow \infty$ 时, 成立

$$\begin{aligned} \int_G F_\alpha(x, u_m, \nabla u)(u_m - u)_\alpha dx &= \int_G F_\alpha(x, u, \nabla u)(u_m - u)_\alpha dx \\ & \quad + \int_G (F_\alpha(x, u_m, \nabla u) - F_\alpha(x, u, \nabla u))(u_m - u)_\alpha dx \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (35)$$

用 $\varphi = \frac{(u_m - u)_\alpha}{\|u_m - u\|_{\dot{W}^1_1(G)}}$ 代入式(20)即得

$$\begin{aligned} & \int_G (F_u(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - u),_a dx \\ &= - \int_G F_u(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - u) dx + o(1) \|u_m - u\| \dot{W}_1^1(G) \end{aligned} \quad (36)$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由于条件式(4), 可取 $k_\varepsilon > 0$ 充分大, 使

$$\varphi(t) \leq \varepsilon t^{q-1}, \text{ 当 } t \geq k_\varepsilon$$

于是

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(|u_m|) |u_m - u| dx &= \int_{G \cap \{|u_m - u| > k_\varepsilon\}} + \int_{G \cap \{|u_m - u| \leq k_\varepsilon\}} \\ &\leq \varepsilon \int_G |u_m|^{q-1} |u_m - u| dx + \varphi(k_\varepsilon) \int_G |u_m - u| dx \\ &\leq \varepsilon \int_G \left[\left(2 + \frac{1}{q}\right) |u_m|^q + \frac{1}{q} |u|^q \right] dx + \varphi(k_\varepsilon) \int_G |u_m - u| dx \end{aligned} \quad (37)$$

固定 ε , 由于式(28), 当 $m \rightarrow \infty$ 时

$$\varphi(k_\varepsilon) \int_G |u_m - u| dx \rightarrow 0$$

从而式(37)隐含了

$$\int_G \varphi(|u_m|) |u_m - u| dx \rightarrow 0, \text{ 当 } m \rightarrow \infty \quad (38)$$

由于结构条件(iv), 式(29)和式(38), 我们有

$$\begin{aligned} & \left| \int_G F_u(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - u) dx \right| \\ &\leq \int_G [C |\nabla u_m|^{p/q'} + \lambda_1 \varphi(|u_m|)] |u_m - u| dx \rightarrow 0, \text{ 当 } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

从而由式(36)得

$$\int_G F_a(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - u),_a dx \rightarrow 0, \text{ 当 } m \rightarrow \infty \quad (39)$$

联合式(35), 式(39)给出欲证的式(30).

注意到 $p > 2$ 的情形, 我们有

当 $a \geq b > 0$ 时

$$\int_0^1 |a - bt|^{p-2} dt = b^{p-2} \int_0^1 (1-t)^{p-2} dt = \frac{b^{p-2}}{p-1}$$

当 $b > a = 0$ 时

$$\int_0^1 |a - bt|^{p-2} dt = b^{p-2} \int_0^1 t^{p-2} dt = \frac{b^{p-2}}{p-1}$$

当 $b > a > 0$ 时, 则 $0 < t_0 = \frac{a}{b} < 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |a - bt|^{p-2} dt &= \left(\int_0^{t_0} + \int_{t_0}^1 \right) |a - bt|^{p-2} dt \\ &= \frac{a^{p-1} + (b-a)^{p-1}}{b(p-1)} \geq \frac{[a + (b-a)]^{p-1}}{b(p-1) 2^{p-2}} = \frac{b^{p-2}}{(p-1) 2^{p-2}} \end{aligned}$$

于是在 $p \geq 2$ 时, 利用结构条件(i), 我们有

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_G (F_\alpha(x, u_m, \nabla u_m) - F_\alpha(x, u_m, \nabla u))(u_m - u)_\alpha dx \\
&= \int_G \int_0^1 \frac{d}{dt} F_\alpha(x, u_m, t \nabla u_m + (1-t) \nabla u)(u_m - u)_\alpha dt dx \\
&= \int_G \int_0^1 F_{\alpha\beta}(x, u_m, t \nabla u_m + (1-t) \nabla u)(u_m - u)_\alpha (u_m - u)_\beta dt dx \\
&\geq \int_G \int_0^1 \chi_0 |\nabla u - t \nabla(u_m - u)|^{p-2} dt |\nabla(u_m - u)|^2 dx \\
&\geq \int_G \int_0^1 \chi_0 \|\nabla u - t \nabla(u_m - u)\|^{p-2} dt |\nabla(u_m - u)|^2 dx \\
&\geq \frac{\chi_0}{(p-1)2^{p-2}} \int_G |\nabla(u_m - u)|^p dx.
\end{aligned} \tag{40}$$

由于式(30), 式(40)隐含了 u_m 在 $\dot{W}_0^{1,p}(G)$ 强收敛于 u .

在 $1 < p < 2$ 的情形同样可证 u_m 在 $\dot{W}_0^{1,p}(G)$ 中强收敛于 u . 事实上, 由于式(30)以及文[1]中的公式(19), $u_{m,\alpha}$ 几乎处处收敛于 u_α . 于是存在测度充分接近 G 的闭集 $G_\delta \subset G$, 其上 $u_{m,\alpha}$ 一致收敛于 u_α . 于是

$$\int_{G_\delta} |\nabla(u_m - u)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{当 } m \rightarrow \infty$$

剩下只须去证

$$\int_{G \setminus G_\delta} |\nabla(u_m - u)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{当 } m \rightarrow \infty$$

这和文[1]中所作完全一样, 从略.

这样, 我们证明了由式(1)定义的 $I(u)$ 满足 $P \cdot S \cdot$ 条件. 最后, 还需验证 $I(u)$ 是 C^1 泛函, 利用结构条件(iii)和(iv), 这是易于证明的, 从略.

定理于是完全得证.

参 考 文 献

- [1] 沈尧天, $\dot{W}_0^{1,p}(\Omega)$ 中二阶拟线性椭圆型欧拉方程的非凡解, 中国科学(A辑), 3(1984), 217—225.
- [2] 沈尧天、邓耀华、顾永耕, 方程 $-\Delta u = p(x, u)$ 的非凡解, 科学通报, 29, 6(1984), 324—328.

On the Existence of Nontrivial Solutions for a Class of Elliptic Euler Equations

Liang Xiting

Abstract

In this paper, the existence of nontrivial solutions for a class of elliptic Euler equations is proved by the mountain pass lemma. In the structural conditions of $F_u(x, u, \xi)$, the growth order with respect to u is larger than $(q-1)$ if $q < q_*$, where q_* is the critical exponent of Sobolev imbedding theorem.