第8卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 8 No. 2
1987年5月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) May 1987

求最优树的顺序破圈法

林永发

(应用数学系)

摘 要

最优树问题在生产实践中有广泛的应用.本文给出了一种求最优树的方法——顺序破圈法.它比管梅谷教授所提出的方法——破圈法,证明简单、计算方便.容易在计算机上实现.

树是图论中的重要概念.求最优树的问题,在生产实践中有广泛的应用,因而对它已有不少的研究.本文给出的求最优树的方法——顺序破圈法,比管梅谷教授给出的方法——破圈法[1],证明简单、计算方便.容易在计算机上实现.

一、基本概念

设$G=(V, E)$是一个有限无向连通图,其中V表示图G的顶点集,E表示图G的边集.一个满足条件$E_1\subset E$的图G的子图$H=(V, E_1)$叫做G的生成子图.

对图G的一条边e_i相应地有一个数$l(e_i)$,称$l(e_i)$为边e_i的权(或长度),图G连同在它边上的权称为赋权图.若G_1是赋权图G的子图,则G_1各条边的权之和称为G_1的权.

不含回路的连通图称为树.若T是图G的生成子图,又是一棵树,就称T是图G的一棵生成树.所谓最优树问题就是在赋权图G中寻找具有最小权的生成树.

二、顺序破圈法

首先把赋权图G的边按权从大到小的顺序排列:

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n_e}$$

其中n_e是图G的边数.当G中有某些边具有相同的权时,这些边的顺序可任意排列.即

$$l(a_1)\geqslant l(a_2)\geqslant\cdots\geqslant l(a_{n_e})$$

首先检查a_1,若a_1是图G的某一个回路的一条边,把a_1去掉,否则留下a_1,得到子图G_1,接

本文1986年9月10日收到.

着检查a_2，若a_2是G_1的某一个回路的一条边，就把a_2去掉，否则留下a_2，得到子图G_2，再检查a_3，如此继续下去，直到所得到的子图不再含有回路时为止，该子图就是G的一棵最优树。

例 求图1所示的赋权图G的一棵最优树(图中括号内的数字为该边的权)。

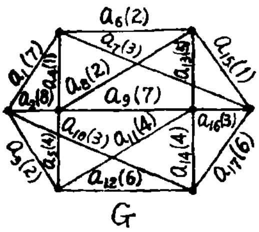

图1

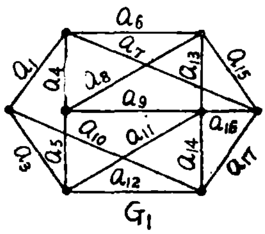

图2

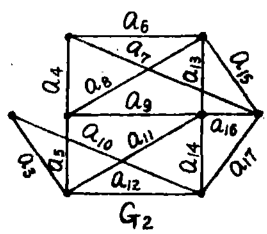

图3

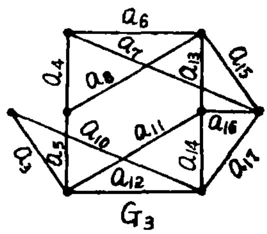

图4

把边按权从大到小的顺序排列：

$a_2(8)$， $a_1(7)$， $a_9(7)$， $a_{12}(6)$， $a_{17}(6)$，

$a_{13}(5)$， $a_5(4)$， $a_{11}(4)$， $a_{14}(4)$， $a_7(3)$，

$a_{10}(3)$， $a_{16}(3)$， $a_3(2)$， $a_6(2)$， $a_8(2)$，

$a_4(1)$， $a_{15}(1)$

由于a_2在图G的回路$a_1a_2a_4$中，把a_2去掉，得子图G_1(图2)。

由于a_1在图G_1的回路$a_1a_3a_5a_4$中，去掉a_1，得子图G_2(图3)。

由于a_9在图G_2的回路$a_8a_{13}a_9$中，去掉a_9，得子图G_3(图4)。

由于a_{12}在图G_3的回路$a_{11}a_{12}a_{14}$中，去掉a_{12}，得子图G_4(图5)。

由于a_{17}在图G_4的回路$a_{14}a_{16}a_{17}$中，去掉a_{17}，得子图G_5(图6)。

由于a_{13}在图G_5的回路$a_{13}a_{15}a_{16}$中，去掉a_{13}，得子图G_6(图7)。

由于a_5在图G_6的回路$a_5a_8a_{15}a_{16}a_{11}$中，去掉a_5，得子图G_7(图8)。

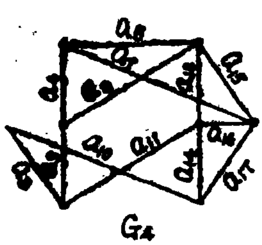

图5

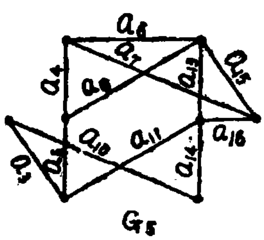

图6

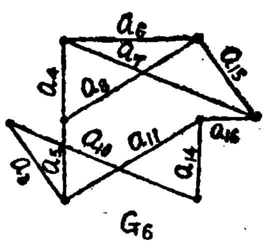

图7

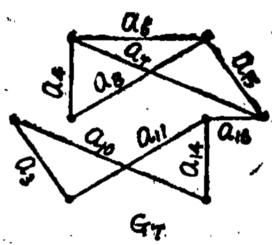

图8

由于a_{11}在图G_7的回路$a_3a_{10}a_{14}a_{11}$中，去掉a_{11}，得子图G_8(图9)。

由于a_{14}不是G_8的任一回路的边，留下a_{14}。由于a_7在G_8的回路$a_6a_7a_{15}$中，去掉a_7，得子图G_9(图10)。

由于a_{10}，a_{16}，a_3都不是G_9的任一回路的边，留下a_{10}，a_{16}，a_3。又由于a_6在图G_9的回路$a_4a_6a_8$中，去掉a_6，得子图G_{10}(图11)。

在图G_{10}中不含回路，它就是图G的一棵最优树。

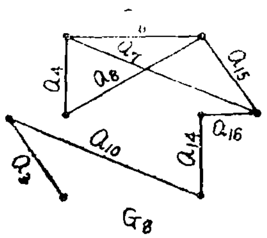

图 9

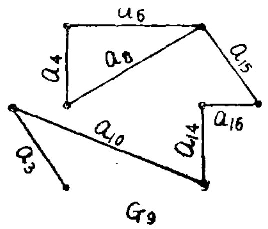

图10

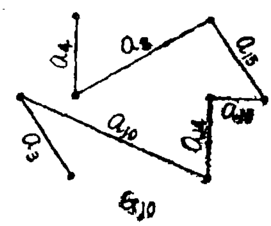

图11

三、方法的证明

引理 1　T是n阶连通图G的一棵生成树的充分必要条件是T为G的有$(n-1)$条边的连通的生成子图[2]．

引理 2　图G的一条边e不包含在G的回路中的充分必要条件是e是G的割边[2]．

引理 3　在树中不相邻的两个顶点间添上一条边，恰好得到一条回路[2]．

设T^*是由顺序破圈法得到的n阶连通图G的一棵生成树，那么有

引理 4　如果T^*的边e是图G的某一回路C的一条边，那么C至少还包含一条权大于或等于e的权的边．

证明　用反证法，假设回路C的其它边的权都小于e的权，那么用顺序破圈法检查e时，应该把它去掉，这与e是T^*的一条边矛盾．

顺序破圈法的根据是如下定理．

定理　由顺序破圈法得到的任何生成树T^*是n阶连通图G的一棵最优树．

证明　由引理 1 可设$T^*=\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\}$，另设$T=\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$是图$G$的任意一棵生成树，那么只要证明$T^*$的权$\leqslant T$的权即可．我们对$T^*$与$T$所含的不同边的条数$i$用数学归纳法证明之．当$i=1$时，不妨设$e_1=a_1$，$e_2=a_2$，$\cdots$，$e_{n-2}=a_{n-2}$，但$e_{n-1}\neq a_{n-1}$，即$e_{n-1}\bar{\in}T$，据引理 3 知，$T\cup e_{n-1}$含有唯一的一条回路$C$，$a_{n-1}$必是回路$C$的一条边，否则$T^*$含有回路$C$，这与$T^*$是$G$的生成树矛盾．据引理 4，$e_{n-1}$的权$\leqslant a_{n-1}$的权，显然，$T^*=(T\cup e_{n-1})-a_{n-1}$，所以$T^*$的权$=T$的权$+e_{n-1}$的权$-a_{n-1}$的权$\leqslant T$的权，结论成立．假设当$i=k$时，结论成立．当$i=k+1$时，即$T^*$与$T$含有$k+1$条不同边，不妨设$e_1=a_1$，$e_2=a_2, \cdots$，$e_{n-k-2}=a_{n-k-2}$，但$e_{n-k-1}$，$\cdots$，$e_{n-1}$与$a_{n-k-1}$，$\cdots, a_{n-1}$任意两条边都不相同，即$e_{n-k-1}\bar{\in}T$，据引理 3，$T\cup e_{n-k-1}$有唯一的一条回路$C_1$，$C_1$至少含有$a_{n-k-1}$，$a_{n-k}$，$\cdots$，$a_{n-1}$中的一条边，否则，$T^*$含有回路$C_1$，这与$T^*$是$G$的生成树矛盾．不妨设$a_{n-k-1}$是回路$C_1$的一条边，我们说，$a_{n-k-1}$是回路$C_1$中权最大的边之一，否则，若$C_1$中有某一边$e_i$的权大于$a_{n-k-1}$的权，那么按顺序破圈法检查$e_i$时，应去掉$e_i$保留$a_{n-k-1}$，这与$T^*$的取法矛盾．所以$e_{n-k-1}$的权$\leqslant a_{n-k-1}$的权．据引理 2，$a_{n-k-1}$不是$T\cup e_{n-k-1}$的割边，因此，$T'=(T\cup e_{n-k-1})-a_{n-k-1}$是含有$(n-1)$条边的连通图，据引理 1，$T'$是$G$的另一棵生成树，$T'$的权$=T$的权$+e_{n-k-1}$的权$-a_{n-k-1}$的权$\leqslant T$的权．由于$T'=\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-k-1}, a_{n-k}, \cdots, a_{n-1}\}$与$T^*$是$G$的含

有k条不同边的生成树，据归纳假设，T^*的权$\leqslant T'$的权，因此，T^*的权$\leqslant T$的权，这就是说，T^*是图G的一棵最优树。

参考文献

〔1〕管梅谷，求最小树的破圈法，数学的实践与认识，4(1975)，38—41.
〔2〕王朝瑞，图论，人民教育出版社，(1981)，67—71.

On the Method of Orderly Breaking Cycle in Searching of Optimal Tree

Lin Yongfa

Abstract

The problem of optimal tree can be applied widely in productive practice. This paper poses a method of orberly breaking cycle with which the optimal tree can be found. Our method is simpler in demonstration and more convenient in calculation than that given by Professor Guan Meigu and it can be put into computer easily.