第8卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.8 No.2
JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY
1987年5月 (NATURAL SCIENCE) May 1987

内积空间的一些特征

张上泰

（应用数学系）

摘　要

这篇文章是从事于内积空间特征的研究.我们有

定理2　一个复Banach空间成为Hilbert空间的充分必要条件是对于任何$x\in E$，使得$f_x(x)=\|x\|^2$，$\|f_x\|=\|x\|$的E上连续线性泛函$f_x(y)$是唯一的，而且对于任何$y\in E$满足$\mathrm{Re} f_x(y)\leq\|y+\|y\|\cdot x\|-\|y\|$.

前　言

一个赋范线性空间成为pre—Hilbert空间，当仅当其范数满足平行四边形法则. 近来许多人继续寻找这种空间的其它特征. 本文也是讨论这个问题，得到两个充要条件. 其一是由空间的范数来刻画；其二是由空间上的线性连续泛函来刻画的. 另外，我们还附带地得到了一个比著名的Schwarz不等式稍强的不等式.

如所周知，一个实的或复的赋范线性空间E称为pre—Hilbert空间，如果它的范数满足平行四边形法则：对于任何x，$y\in E$有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

如果它是实的，则其上内积为

$$(x,\ y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

如是它是复的，则内积为

$$(x,\ y)=\frac{1}{4}\{(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)\}$$

A. J. Penico, C. V. Stanojevic在文〔1〕中给出了复的pre—Hilbert空间的一个特征：

复线性赋范空间E是一个pre－Hilbert空间，当仅当对于所有x，$y\in S$，这里S表示E的单位球面，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2dt\leqslant 1$$

这里，我们也是考虑同样问题，分别得到内积空间的两个特征. 其一是由范数的等式来刻画

本文1986年12月31日收到.

的；另一是由空间上线性连续泛函来刻画的。

首先，我们有

定理 1 设复线性赋范空间E中范数满足：对于任何x，y，$z\in E$有

$$\|x+y+z\|^2=\|x+y\|^2+\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2-\|z\|^2$$

则E是一个复pre—Hilbert空间，其中内积为

$$(x,\ y)=\frac{1}{2}\{(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)+i(\|x+iy\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)\}$$

反之，每一个复pre—Hilbert空间的范数和内积必分别满足上面两个等式。

证 令

$$x=u,\ y=v,\ z=-v$$

依据题设应有

$$\|u\|^2=\|u+v-v\|^2=\|u+v\|^2+\|u-v\|^2-\|u\|^2-2\|u\|^2$$

移项得

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|\ \|^2)$$

这样一来，E就是pre—Hilbert空间。

在这个时候，内积就可变形为

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=\frac{1}{4}\{(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)\}\\&=\frac{1}{4}\{[\|x+y\|^2-(2\|\ \|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2)]\\&\quad+i[\|x+iy\|^2-(2\|x\|^2+2\|iy\|^2-\|x+iy\|^2)]\}\\&=\frac{1}{2}\{(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)+i(\|x+iy\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)\}\end{aligned}$$

反之，假定E是一个pre—Hilbert空间，则

$$\begin{aligned}\|x+y+z\|^2=(x+y+z,\ x+y+z)=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+2[\mathrm{Re}(x,\ y)\\+\mathrm{Re}(x,\ z)+\mathrm{Re}(y,\ z)]\end{aligned}$$

把前面证得的内积公式代入，得

$$\begin{aligned}\|x+y+z\|&=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+2[\tfrac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)\\&\quad+\tfrac{1}{2}(\|x+z\|^2-\|x\|^2-\|z\|^2)+\tfrac{1}{2}(\|y+z\|^2-\|y\|^2-\|z\|^2)]\\&=\|x+y\|^2+\|x+z\|^2+\|y+z\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2-\|z\|^2\end{aligned}$$

至此，定理证完。

注 此定理对于实线性赋范空间也有相应的形式，这只要观察上述定理的证明便可明白。

其次，我们要给出一个Banach空间成为一个Hilbert空间的充分必要条件，这个条件是用空间上的线性连续泛函来表述的。

我们知道，对于实的或复的线性赋范空间，任定一点x，总有一个连续泛函$\varphi_x(y)$满足：

$$\varphi_x(x)=\|x\|^2,\quad \|\varphi_x\|=\|x\|$$

引理 1 设E是一个实线性赋范空间。若对于每一个$x\in E$，满足

$$\varphi_x(x)=\|x\|^2,\quad \|\varphi_x\|=\|x\|$$

的E上线性连续泛函$\varphi_x(y)$（$y\in E$）是唯一的，而且对于任何$y\in E$有

$$\varphi_x(y)\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|-\|y\|$$

则E是一个pre—Hilbert空间，而且其内积为$\varphi_x(y)$。

证 首先证明对于任何实数β和任何x，$y\in E$，有

$$\varphi_{\beta x}(y)=\beta\varphi_x(y)$$

事实上，我们还可以求出$\varphi_x(y)$的值。假若实数c满足

$$\sup_t\{-\|x\|\cdot\|tx+y\|-t\|x\|^2\}\leqslant c\leqslant\inf_{t_1}\{\|x\|\cdot\|t_1x+y\|-t_1\|x\|^2\}$$

其中t和t_1是任意实数，则不难推出对于任何实数α都有

$$|\alpha\|x\|^2+c|\leqslant\|x\|\cdot\|\alpha x+y\|$$

上述这种实数c的存在是无疑的。因为对于任意实数t和t_1，有

$$t_1\|x\|^2-t\|x\|^2\leqslant|t_1-t|\cdot\|x\|^2=\|x\|\cdot\|t_1x-tx\|\leqslant\|x\|\cdot(\|t_1x+y\|+\|tx+y\|)$$

即对于任意的实数t和t_1，有

$$-\|x\|\cdot\|tx+y\|-t\|x\|^2\leqslant\|x\|\cdot\|t_1x+y\|-t_1\|x\|^2$$

从而

$$\sup_t\{-\|x\|\cdot\|tx+y\|-t\|x\|^2\}\leqslant\inf_{t_1}\{\|x\|\cdot\|t_1x+y\|-t_1\|x\|^2\}$$

设β_1和β_2是两个任意实数，且$\beta_2\neq0$。用$\alpha=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$代入前式得

$$\left|\frac{\beta_1}{\beta_2}\|x\|^2+c\right|\leqslant\|x\|\cdot\left\|\frac{\beta_1}{\beta_2}x+y\right\|$$

亦即

$$|\beta_1\|x\|^2+\beta_2c|\leqslant\|x\|\cdot\|\beta_1x+\beta_2y\|$$

此式对于$\beta_2=0$也是成立的。

根据文献〔2〕中第四章§5定理2(此定理对实的情况也是对的)，对于任何上述的那种实数c在E上都存在一个线性连续泛函$f_x(y)$满足：

$$f_x(x)=\|x\|^2,\ f_x(y)=c,\ \|f_x\|=\|x\|$$

这里x和y都是事先任意取定的。

再根据引理之设，必有

$$\sup_t\{-\|x\|\cdot\|tx+y\|-t\|x\|^2\}=\inf_{t_1}\{\|x\|\cdot\|t_1x+y\|-t_1\|x\|^2\}$$

此就是$\varphi_x(y)$的数值。当$\beta\geqslant0$时

$$\begin{aligned}\varphi_{\beta x}(y)&=\sup_t\{-\beta\|x\|\cdot\|t\beta x+y\|-t\beta^2\|x\|^2\}\\&=\beta\cdot\sup_t\{-\|x\|\cdot\|t\beta x+y\|-t\beta\|x\|^2\}\\&=\beta\cdot\sup_{t'}\{-\|x\|\cdot\|t'x+y\|-t'\|x\|^2\}=\beta\varphi_x(y)\end{aligned}$$

而当$\beta<0$时

$$\begin{aligned}\varphi_{\beta x}(y)&=\sup_t\{\beta\|x\|\cdot\|t\beta x+y\|-t\beta^2\|x\|^2\}\\&=\beta\inf_t\{\|x\|\cdot\|\beta tx+y\|-t\beta\|x\|^2\}\\&=\beta\inf_{t'}\{\|x\|\cdot\|t'x+y\|-t'\|x\|^2\}=\beta\varphi_x(y)\end{aligned}$$

总之，对任何实数β有

$$\varphi_{\beta x}(y)=\beta\varphi_x(y)$$

次证对于任何实数β_1和β_2以及任定的x，$y\in E$有

$$|\beta_1\|y\|^2+\beta_2\varphi_x(y)|\leqslant\|y\|\cdot\|\beta_1 y+\beta_2 x\|$$

事实上，对于任何$x_1\in E$有

$$\varphi_{x_1}(y)=-\varphi_{x_1}(-y)\geqslant-\|x_1\|\cdot\|y\|\geqslant-(\|y+\|y\|\cdot x_1\|+\|-y\|)$$
$$=-\|y+\|y\|\cdot x_1\|-\|y\|$$

再考虑到引理的设，则

$$-\|y+\|y\|\cdot x_1\|-\|y\|\leqslant\varphi_{x_1}(y)\leqslant\|y+\|y\|\cdot x_1\|-\|y\|$$

亦即

$$|\|y\|+\varphi_{x_1}(y)|\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|$$

当$\beta_1\|y\|\neq 0$时，用$x_1=(\beta_2/\beta_1\|y\|)x$代入上式就得

$$\left|\|y\|+\frac{\beta_2}{\beta_1\|y\|}\varphi_x(y)\right|\leqslant\left\|y+\|y\|\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1\|y\|}x\right\|$$

即

$$|\beta_1\|y\|^2+\beta_2\varphi_x(y)|\leqslant\|y\|\cdot\|\beta_1 y+\beta_2 x\|$$

此式对于$\beta_1\|y\|=0$也是成立的。

这样一来，依照前述定理，在y点存在线性连续泛函$g_y(z)$($z\in E$)满足：

$$g_y(y)=\|y\|^2,\quad g_y(x)=\varphi_x(y),\quad \|g_y\|=\|y\|$$

再由引理之设，则$g_y=\varphi_y$，从而$\varphi_y(x)=\varphi_x(y)$。

此外，由于$\varphi_x(x)=\|x\|^2$，则$\varphi_x(y)$就是实线性赋范空间E上一个内积，而且E成为一个实的pre—Hilbert空间，引理证完。

现在来考虑复线性赋范空间的情况。

引理 2　设E是一个复线性赋范空间。若对于每一个$x\in E$，满足

$$\|f_x\|=\|x\|,\quad f_x(x)=\|x\|^2$$

的E上线性连续泛函$f_x(y)$($y\in E$)是唯一的，而且对于任何$y\in E$有

$$\mathrm{Re}f_x(y)\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|-\|y\|$$

则E是一个pre—Hilbert空间，而且其内积为$f_x(y)$。

证　对于每个固定的$x\in E$，令

$$\varphi(y,\ x)=\mathrm{Re}f_x(y),\quad y\in E$$

不难验证有

$$f_x(y)=\varphi(y,\ x)-i\varphi(iy,\ x)$$

我们暂且把E视为实线性赋范空间，则$\varphi(y,x)$（记为$\varphi_x(y)$）就是实线性赋范空间E上关于y的线性连续泛函，而且

$$\varphi_x(x)=\|x\|^2,\quad\|\varphi_x\|=\|x\|.$$

反之，假设$\varphi_x(y)=\varphi(y,\ x)$是实线性赋范空间$E$上关于$y$的线性连续泛函，而且满足：

$$\varphi_x(x)=\|x\|^2,\quad\|\varphi_x\|=\|x\|$$

命

$$f_x(y)=\varphi(y,\ x)-i\varphi(iy,\ x),\quad y\in E$$

那末，$f_x(y)$就是复线性赋范空间E上y的线性连续泛函，而且满足：

$$\|f_x\| = \|x\|,\quad f_x(x) = \|x\|^2$$

事实上，我们有

$$f_x(iy) = \varphi(iy,\ x) - i\varphi(i^2y,\ x) = \varphi(iy,\ x) + i\varphi(y,\ x)$$
$$= i[\varphi(y,\ x) - i\varphi(iy,\ x)] = if_x(y)$$

再考考到$\varphi(y,\ x)$关于$y\in E$是实线性的，因此$f_x(y)$关于$y\in E$是复线性的。再因

$$|f_x(y)| = f_x(y)\cdot e^{i\theta} = f_x(e^{i\theta}\cdot y) = \varphi_x(e^{i\theta}\cdot y) \leqslant \|y\|\cdot\|x\|$$

和

$$\|x\|^2 = \varphi_x(x) \leqslant |f_x(x)| \leqslant \|x\|\cdot\|x\| = \|x\|^2$$

可知$f_x(x) = \|x\|^2$，从而

$$\|f_x\| = \|x\|,\quad f_x(x) = \|x\|^2$$

根据以上所述和引理之设，对于任定的$x\in E$，实线性空间E上满足：

$$\varphi_x(x) = \|x\|^2,\quad \|\varphi_x\| = \|x\|$$

的线性连续泛函也是唯一的。亦即只有$\mathrm{Re}f_x(y)$一个。再根据引理的另一设和引理1可知，实线性赋范空间E是一个pre—Hilbert空间，而且其内积

$$(y,\ x)_1 = \mathrm{Re}f_x(y)$$

从而它作为一个复线性赋范空间也是pre—Hilbert空间，而且其内积

$$(y,\ x) = (y,\ x)_1 + i(y,\ ix)_1$$

这一点只要注意到本文一开始的三个等式就可明白。

由内积公式易知

$$(y,\ ix)_1 = (iy,\ i^2x)_1$$

由此可得

$$(y,\ x) = (y,\ x)_1 + i(iy,\ i^2x)_1 = (y,\ x)_1 + i(iy,\ -x)_1$$
$$= (y,\ x)_1 - i(iy,\ x)_1 = \mathrm{Re}f_x(y) - i\mathrm{Re}f_x(iy) = f_x(y)$$

引理证完。

定理 2　设E是复的Banach空间，则它成为Hilbert空间的充分必要条件是对每一个$x\in E$，满足

$$f_x(x) = \|x\|^2,\quad \|f_x\| = \|x\|$$

的E上线性连续泛函$f_x(y)$是唯一的，而且对于任何$y\in E$有

$$\mathrm{Re}f_x(y) \leqslant \|y + \|y\|\cdot x\| - \|y\|$$

证　充分性已由引理2证得，下证必要性。首先证明对于每一个$x\in E$，E上满足

$$f_x(x) = \|x\|^2,\quad \|f_x\| = \|x\|$$

的线性连续泛函$f_x(y)$只有内积$(y,\ x)$一个。

事实上，若不然，则根据Riesz定理，还存在一个$x_1\in E$，$x_1\neq x$，使内积$(y,\ x_1)$满足：

$$(x,\ x_1) = \|x\|^2,\quad \|x_1\| = \|x\|$$

由此得

$$(x,\ x_1 - x) = (x,\ x_1) - (x,\ x) = 0$$

亦即$x\perp(x_1 - x)$。但

$$x_1=(x_1-x)+x$$

于是

$$\|x_1\|^2=\|x_1-x\|^2+\|x\|^2>\|x\|^2$$

这个矛盾证实了唯一性。

次证后半结论。利用 $\|f_y\|=\|y\|$，有

$$\begin{aligned}\left|\|y\|^2+\|y\|\cdot f_y(x)\right| &= |f_y(y)+f_y(\|y\|\cdot x)|\\ &= |f_y(y+\|y\|\cdot x)|\leqslant\|y\|\cdot\|y+\|y\|\cdot x\|\end{aligned}$$

亦即

$$\left|\|y\|+f_y(x)\right|\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|$$

由此有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}f_x(y)=\mathrm{Re}f_y(x) &= \|y\|+\mathrm{Re}f_y(x)-\|y\|=\mathrm{Re}[\|y\|+f_y(x)]-\|y\|\\ &\leqslant\left|\|y\|+f_y(x)\right|-\|y\|\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|-\|y\|\end{aligned}$$

定理证完。

对于实的Banach空间也有如下结论。

定理 3 设E是实的Banach空间，则它成Hilbert空间的充分必要条件是对于每一个$x\in E$，E上满足

$$f_x(x)=\|x\|^2,\quad \|f_x\|=\|x\|$$

的线性连续泛函$f_x(y)$是唯一的，而且对于任何$y\in E$有

$$f_x(y)\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|-\|y\|$$

这个定理的证明与定理2完全类同，这里从略。

如所周知，在实Hilbert空间中关于内积有著名的Schwarz不等式

$$-\|x\|\cdot\|y\|\leqslant(x,\ y)\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$$

利用上面定理，我们立即可得如下稍精确的不等式，即

推论 1 设E是实Hilbert空间，则其上内积满足

$$\begin{aligned}-\|x\|\cdot\|y\| &\leqslant-\|y-\|y\|\cdot x\|+\|y\|\leqslant(x,y)\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|\\ &\quad-\|y\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|\end{aligned}$$

证 由定理 3 和范数的三角形不等式，有

$$\begin{aligned}(x,\ y) &\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|-\|y\|\leqslant\|y\|+\|y\|\cdot\|x\|-\|y\|\\ &=\|x\|\cdot\|y\|\end{aligned}$$

另一方面

$$-(x,\ y)=(-x,\ y)\leqslant\|y+\|y\|(-x)\|-\|y\|=\|y-\|y\|x\|-\|y\|$$

此即

$$\begin{aligned}(x,\ y) &\geqslant-\|y-\|y\|\cdot x\|+\|y\|\geqslant-(\|y\|+\|y\|\cdot\|x\|)\\ &\quad+\|y\|=-\|x\|\cdot\|y\|\end{aligned}$$

推论证完。

参 考 文 献

〔1〕Penico, A.J., C.V.Stanojevic, An Integral Analogue to Parallelogram Law, Proc. Amer.Math.Soc.,79(1980), 427—430.

〔2〕Yosida, K., Functional analysis, Springer·Verlin·Berlin·Heidelberg-New York, (1978).

〔3〕Sz-Nagy, B., Foias, C., Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, Amsterdam, North-Holland,(1970).

Some Characteristics of Inner Product Space

Zhang Shangtai

Abstract

This paper is devoted to the study of some characteristics of inner product space, we heve

Theorem 2. A necessary and sufficient condition for e complex Banach space to become a Hilbert space is that for any $x\in E$, continuous linear functional $f_x(y)$ on E of $f_x(x)=\|x\|^2$, $\|f_x\|=\|x\|$ is unique, and for any $y\in E$, it satisfies Re $f_x(y)\leqslant\|y+\|y\|\cdot x\|-\|y\|$.