

机床有级变速系统传动比分配的新方法

丰 忠 焕

(精密机械工程系)

摘 要

本文提出了计算机床有级变速系统传动比分配的理论公式,并加以论证,同时给出计算机程序。

前 言

在机械行业中,经常会遇到有级变速系统的设计,这是一件很重要,但又颇繁琐的工作。因为传动机构在多数机械设备中是很主要的部件,设计是否合理,对整台设备的使用性能、材料的消耗、经济效益等都有很大的影响。而历来沿用的方法是探索,即拟定多种方案,划出转速图,逐一加以比较,从中选一,这样不但很花费时间,而且很难说,所确定的方案就是最佳的。从多年的实践中,作者认为转速图的设计是有规可循的,可以从推得的理论公式中一次性地找到最佳传动比分配方案。由于有了理论公式为依据,不但更新了传统的设计方法,而且CAD(计算机辅助设计)也可进入该领域

为了实现确定的主轴转速级数,需要采用几个变速组?几对齿轮传动?以及如何将总传动比分配到各变速组中去?这是设计转速图时要解决的三个主要问题。前二个问题,根据机床设计的有关原则,在拟定结构式时,可较容易地确定下来,而第三个问题的解决,在国内外虽有不少探讨,但至今仍没有一个较科学的解决办法,有时即使在只有两个中间变速组的情况下,也不容易找到合理的传动比分配方案,现举文〔2〕中一例来加以说明。该书作者对四级转速图的设计拟定了三种方案,认为正上方的方案是较理想的,本文作者认为该方案(教科书推荐的)由于传动比分配不够合理而存在结构尺寸欠紧凑的弊端。现将教科书上推荐的方案《简称为方案一》转抄如图1。作者根据从理论上推得的传动比分配公式,设计了另一转速图(简称方案二),如图2。下面就从对结构影响较大的齿数和、中心距和两方面出发(在其它因素不变的情况下),将两方案进行对比。

由于第一传动组是定比传动,而末级传动组的传动比一般采取极限值,即首尾两传动组的传动比分配比较固定,故一般仅需分配中间变速组的传动比即可。我们知道满足相同设

本文1985年12月31日收到。

计要求的诸方案中，在变速组数，传动付数及最小齿轮的齿数相同的情况下（一般均如此）每一变速组中，最小传动比的比值大小，直接决定该组的齿数和（包括中心距和），而齿数和的多少则直接影响材料的消耗和使用性能。为了直观起见，设两方案的中间变速组的传动付数相同，齿轮模数 $m = 3$ ，最小齿轮的齿数 $z = 20$ ，公比 $\varphi = 1.26$ 。

方案一

第二变速组的最小传动比为 $1 : \varphi^2$ （即 BC 线）。

BC 传动付的齿数和为 52 齿。

该组的齿数和为 $3 \times 52 = 156$ 齿。

第三变速组的最小传动比为 $1 : \varphi^6$ （即 CD 线）。

CD 传动付的齿数和为 100 齿。

该组的齿数和为 $3 \times 100 = 300$ 齿。

中间变速组（第 2、3 组）的齿数和为 $156 + 300 = 456$ 齿。

两组的中心距和为 $(52 / 2) \times 3 + (100 / 2) \times 3 = 228 \text{ mm}$ 。

方案二

第 2、第 3 变速组的最小传动比均为 $1 : \varphi^4$ （即 BC、CD 线）——根据后面介绍的理论公式可算得：

BC 或 CD 传动付的齿数和为 70。

中间变速组（第 2、3 组）的齿数和为 $3 \times 70 + 3 \times 70 = 420$ 齿。

两组的中心距和为 $\frac{70}{2} \times 3 + \frac{70}{2} \times 3 = 210 \text{ mm}$ ；

由上面计算可以看出：

两方案的齿数差为 $\Delta Z = 456 - 420 = 36$ 齿。

两方案的中心距差为 $\Delta L = 228 - 210 = 18 \text{ mm}$

从以上对比中不难看出，方案二比方案一优越，前者比后者齿数少 8.6%，中心距短 8.6%。上述例子也启发我们：应该寻找传动比分配方案的数学模型，有了理论公式为依据，才能综合考虑齿数与传动比的合理分配问题，提高设计的准确性和效率。

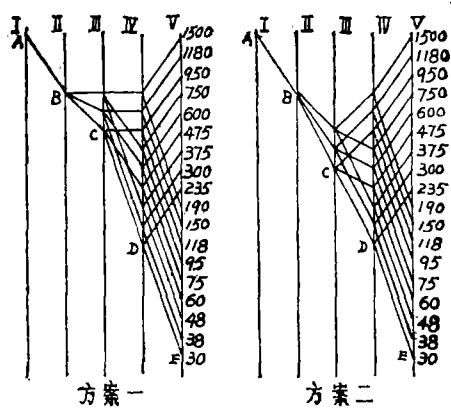


图 1

图 2

一、最佳传动比配公式

设 T 为各变速组的齿数和（不包括定比传动组，一般为第一传动组）；

$i_2, i_3, i_4, \dots, i_n$ 为第 2, 3, 4, \dots , n 个变速组的最小传动比；

$s_2, s_3, s_4, \dots, s_n$ 为第 2, 3, 4, \dots , n 个变速组内的齿轮对数；

$z_2, z_3, z_4, \dots, z_n$ 为第 2, 3, 4 ..., n 个变速组内的最小齿轮的齿数。

1. 有两个变速组的传动比的分配公式

设 i_{23} 为第 2、第 3 两个变速组的最小传动比的乘积, 即 $i_{23} = i_2 i_3$ 。

证 第 2 变速组的齿数和为 $(1 + 1/i_2) s_2 z_2$ 。

第 3 变速组的齿数和为 $(1 + 1/i_3) s_3 z_3$ 。

两个变速组的齿数和为

$$T = (1 + \frac{1}{i_2}) s_2 z_2 + (1 + \frac{1}{i_3}) s_3 z_3$$

因为

$$\frac{1}{i_2} \cdot \frac{1}{i_3} = \frac{1}{i_{23}}$$

令

$$x_2 = \frac{1}{i_2}$$

则

$$\frac{1}{i_3} = \frac{1}{i_{23} x_2}$$

$$T = T(x_2) = (1 + x_2) s_2 z_2 + s_3 z_3 + \frac{s_3 z_3}{i_{23} x_2}$$

$$T'(x_2) = s_2 z_2 - \frac{s_3 z_3}{i_{23} x_2^2}$$

令

$T'(x_2) = 0$ (一元函数极值的必要条件)。

得

$$s_2 z_2 = \frac{s_3 z_3}{i_{23} x_2^2}$$

所以

$$x_2 = \sqrt{\frac{s_3 z_3}{i_{23} s_2 z_2}}$$

即

$$\frac{1}{i_2} = \frac{\sqrt{\frac{s_2 z_2 s_3 z_3}{i_{23}}}}{s_2 z_2} \quad (1)$$

因为

$$\frac{1}{i_3} = \frac{1}{i_{23} x_2} = \frac{s_2 z_2}{i_{23} \sqrt{\frac{s_2 z_2 s_3 z_3}{i_{23}}}} = \frac{\sqrt{\frac{s_2 z_2 s_3 z_3}{i_{23}}}}{s_3 z_3} \quad (2)$$

若式(1) $\times s_2 z_2$, 得

$$\frac{S_2 Z_2}{i_2} = \sqrt{\frac{S_2 Z_2 S_3 Z_3}{i_{23}}} \quad (3)$$

将式(2) $\times S_3 Z_3$, 得

$$\frac{S_3 Z_3}{i_3} = \sqrt{\frac{S_2 Z_2 S_3 Z_3}{i_{23}}} \quad (4)$$

则式(3)等于式(4), 即

$$\begin{aligned} \frac{S_2 Z_2}{i_2} &= \frac{S_3 Z_3}{i_3} \\ &= \sqrt{\frac{S_2 Z_2 S_3 Z_3}{i_{23}}} \end{aligned}$$

2. 有三个变速组的传动比分配公式

设 i_{2-4} 为第 2、3、4 三个变速组传动比的乘积, 即

$$i_{2-4} = i_2 i_3 i_4$$

齿数和

$$T = \left(1 + \frac{1}{i_2}\right) S_2 Z_2 + \left(1 + \frac{1}{i_3}\right) S_3 Z_3 + \left(1 + \frac{1}{i_4}\right) S_4 Z_4$$

令

$$\frac{1}{i_2} = x_2, \quad \frac{1}{i_3} = x_3$$

则

$$\frac{1}{i_4} = \frac{1}{x_2 x_3 i_{2-4}}$$

$$T = T(x_2, x_3) = S_2 Z_2 + S_3 Z_3 + S_4 Z_4 + S_2 Z_2 x_2 + S_3 Z_3 x_3$$

$$+ \frac{S_4 Z_4}{x_2 x_3 i_{2-4}}$$

$$\frac{\partial T(x_2, x_3)}{\partial x_2} = S_2 Z_2 - \frac{S_4 Z_4}{x_2^2 x_3 i_{2-4}}$$

$$\frac{\partial T(x_2, x_3)}{\partial x_3} = S_3 Z_3 - \frac{S_4 Z_4}{x_2 x_3^2 i_{2-4}}$$

二元函数极值的必要条件是, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial T(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

得

$$S_2 Z_2 = \frac{S_4 Z_4}{x_2^2 x_3 i_{2-4}} \quad (5)$$

$$S_3 Z_3 = \frac{S_4 Z_4}{x_2 x_3^2 i_{2-4}} \quad (6)$$

式(5)乘以式(6), 得

$$S_2 Z_2 S_3 Z_3 = \frac{(S_4 Z_4)^2}{(x_2 x_3)^3 i_{2-4}^2}$$

所以

$$x_2 x_3 = \sqrt[3]{\frac{(S_4 Z_4)^2}{i_{2-4}^2 S_2 Z_2 S_3 Z_3}} \quad (7)$$

式(7)代入式(5), 得

$$x_2 = \frac{S_4 Z_4}{S_2 Z_2 i_{2-4} \sqrt[3]{\frac{(S_4 Z_4)^2}{S_2 Z_2 S_3 Z_3 i_{2-4}^2}}}$$

即

$$x_2 = \frac{1}{i_2} = \frac{\sqrt[3]{S_2 Z_2 S_3 Z_3 S_4 Z_4}}{S_2 Z_2 i_{2-4}} \quad (8)$$

将式(7)代入式(6), 得

$$x_3 = \frac{S_4 Z_4}{S_3 Z_3 i_{2-4} \sqrt[3]{\frac{(S_4 Z_4)^2}{S_2 Z_2 S_3 Z_3 i_{2-4}^2}}}$$

即

$$x_3 = \frac{1}{i_3} = \frac{\sqrt[3]{S_2 Z_2 S_3 Z_3 S_4 Z_4}}{S_3 Z_3 i_{3-4}} \quad (9)$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{i_4} &= \frac{1}{x_2 x_3 i_{2-4}} \\ \frac{1}{i_4} &= \frac{\sqrt[3]{S_2 Z_2 S_3 Z_3 S_4 Z_4}}{S_4 Z_4} \end{aligned} \quad (10)$$

将式(8)乘以 $S_2 Z_2$, 式(9)乘以 $S_3 Z_3$, 式(10)乘以 $S_4 Z_4$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{S_2 Z_2}{i_3} &= \frac{S_3 Z_3}{i_3} \\ &= \frac{S_4 Z_4}{i_4} \\ &= \sqrt[3]{\frac{S_2 Z_2 S_3 Z_3 S_4 Z_3}{i_{2-4}}} \end{aligned} \quad (11)$$

3. 有n个变速组的传动比分配公式

n 为变速传动组总数(不包括定比传动组)。

$$T = (1 + \frac{1}{i_1}) S_1 Z_1 + (1 + \frac{1}{i_2}) S_2 Z_2 + \cdots + (1 + \frac{1}{i_n}) S_n Z_n$$

$$i_{1-n} = i_1 i_2 \cdots i_n$$

$$T = (1 + \frac{1}{i_1}) S_1 Z_1 + (1 + \frac{1}{i_2}) S_2 Z_2 + \cdots + (1 + \frac{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}}{i_{1-n}}) S_n Z_n$$

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = S_1 Z_1 + S_2 Z_2 + \cdots + S_n Z_n + x_1 S_1 Z_1 + x_2 S_2 Z_2 + \cdots + x_{n-1} S_{n-1} Z_{n-1} + \frac{S_n Z_n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} i_{1-n}}$$

多元函数 (n-1) 的极值的必要条件是一阶偏导数为零。令

$$\frac{\partial T(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}{\partial x_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

$$S_1 Z_1 = \frac{S_n Z_n}{x_1^2 x_2 \cdots x_{n-1} i_{1-n}} \tag{12}$$

$$S_2 Z_2 = \frac{S_n Z_n}{x_1 x_2^2 \cdots x_{n-1} i_{1-n}} \tag{13}$$

⋮

$$S_{n-1} Z_{n-1} = \frac{S_n Z_n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}^2 i_{1-n}} \tag{n-1}$$

将各式相乘，即式 (12) × (13) × ⋯ × (n-1)，得

$$S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_{n-1} Z_{n-1} = \frac{(S_n Z_n)^{n-1}}{(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^n i_{1-n}^{n-1}}$$

所以

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} = \sqrt[n]{\frac{(S_n Z_n)^{n-1}}{S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_{n-1} i_{1-n}^{n-1}}} \tag{25}$$

将式 (25) 代入式 (12)，得

$$x_1 = \frac{S_n Z_n}{S_1 Z_1 i_{1-n} \sqrt[n]{\frac{(S_n Z_n)^{n-1}}{S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_{n-1} Z_{n-1} i_{1-n}^{n-1}}}}$$
$$\frac{1}{i_1} = x_1 = \frac{\sqrt[n]{S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_n Z_n}}{S_1 Z_1} \tag{26}$$

将式 (25) 依次代入式 (13)，(14)，⋯，(n-1)，得

$$\frac{1}{i_2} = x_2 = \frac{\sqrt[n]{S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_n Z_n}}{S_2 Z_2} \tag{27}$$

$$\frac{1}{i_3} = x_3 = \frac{\sqrt[n]{\frac{S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_n Z_n}{i_{1-n}}}}{S_3 Z_3} \quad (28)$$

⋮

$$\frac{1}{i_{n-1}} = x_{n-1} = \frac{\sqrt[n]{\frac{S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_n Z_n}{i_{1-n}}}}{S_{n-1} Z_{n-1}} \quad (29)$$

又因为

$$\frac{1}{i_1} \times \frac{1}{i_2} \times \frac{1}{i_3} \cdots \frac{1}{i_n} = \frac{1}{i_{1-n}}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{i_n} = x_n &= \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} i_{1-n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{(S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_n Z_n)^{n-1}}{i_1^{n-1}}} \cdot i_{1-n}} \\ &= \frac{S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_{n-1} Z_{n-1} S_n Z_n}{i_{1-n} \sqrt[n]{(S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_n Z_n)^{n-1}} \cdot S_n Z_n} \\ &= \frac{\sqrt[n]{\frac{S_1 Z_1 S_2 Z_2 \cdots S_n Z_n}{i_{1-n}}}}{S_n Z_n} \end{aligned} \quad (30)$$

将式(26) $\times S_1 Z_1$, 式(27) $\times S_2 Z_2$, 式(28) $\times S_3 Z_3$, \cdots 式(30) $\times S_n Z_n$, 得

$$\begin{aligned} \frac{S_1 Z_1}{i_1} &= \frac{S_2 Z_2}{i_2} = \frac{S_3 Z_3}{i_3} \\ &= \cdots = \frac{S_n Z_n}{i_n} \end{aligned} \quad (31)$$

式(30)就是计算有级变速系统传动比分配的理论公式。由以上推证过程可得: 欲使一个多轴传动系统的总齿数和为最少, 必须使每一个传动组中, 最小传动比的倒数、传动付数、最小齿轮的齿数, 这三者的乘积各组都相等, 即式(31)。

二、计算机程序

由于有了理论公式为依据, 就可以利用当代最先进的计算工具——电子计算机进行有级变速传动系统的辅助设计。只要根据设计任务书的要求输入电机的转速 u_E , 第二轴输入转速 u_H 、最低转速 u_L 、传动组数 s 、各传动组的最小齿数 z 、各级的级差 x 、转速级数 N 和公比 $F(\varphi)$, 则计算机将自动计算各变速组的最小传动比, 各传动付的主动轮和从动轮的齿数及各

档的转速,最后画出转速图,程序框图如图 3 所示。

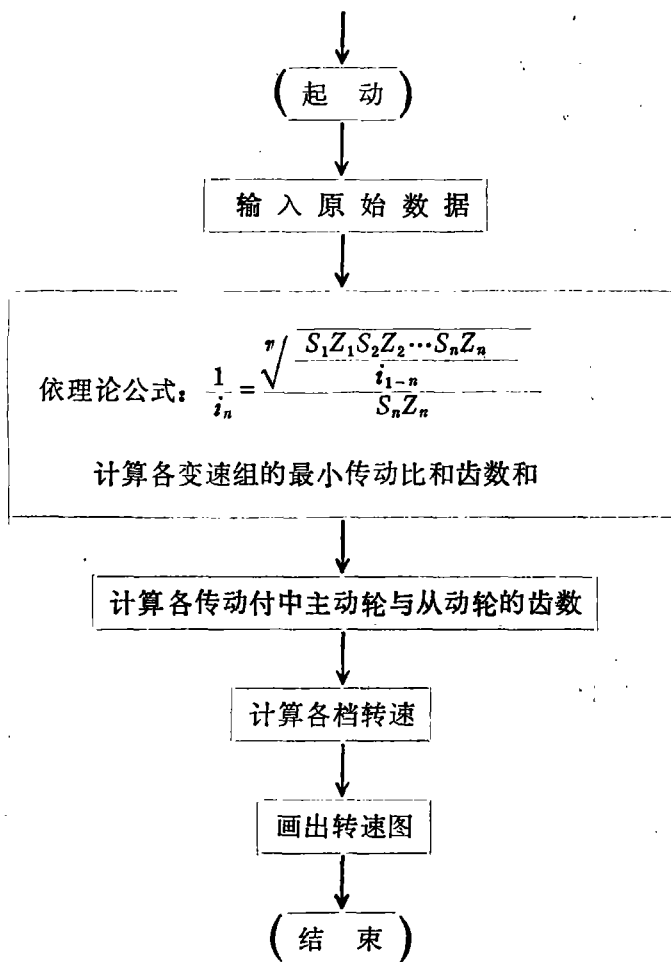


图 3 程序框图

转速图设计程序如下:

```

70  X1=INT((LOG(UH)-LOG(UL))/LOG(F)+.5)
80  D=1/FX1
90  FOR K=2 TO N
100  T(K)=S(K)*Z(K):B=B*T(K)
110  NEXT K
120  C=B/D:C=C/(N-1)
125  PRINT"MINIMUM RATIOS","SUM OF TEETH"
130  FOR K=2 TO N
  
```



```
140 I(K,1)=C/T(K)
150 X=INT((LOG(1/I(K,1))/LOG(F)+.5)
160 I(K,1)=FX:P(K,1)=I(K,1)
170 T(K)=INT((1+1/I(K,1))*Z(K)+.5)
180 PRINT I(K,1),T(K)
190 NEXT K
195 PRINT:PRINT OF GEARS"RATIOS":PRINT"DRIVE","DRIVEN"
200 FOR K=2 TO N
205 Z=T(K)-Z(K):PRINT Z(K),Z
210 FOR J=2 TO S(K)
220 I(K,1)=I(K,1)*FX(K)
230 M(K,J)=INT(T(K)/(1+1/I(K,1))+.5)
240 Y(K,J)=T(K)-M(K,J)
250 PRINT M(K,J),Y(K,J)
260 NEXT J
265 PRINT
270 NEXT K
275 PRINT:PRINT
280 S=1:PRINT"R.P.M OF SPINDLE"
290 FOR I=2 TO N:S=S*S(I)
300 NEXT:PRINT UL
```

例：有一个五轴18级转速的有级变速传动机构，其结构式为 $18 = 1_{(1)} \times 3_{(1)} \times 3_{(3)} \times 2_{(9)}$ ，电机转速 $u_E = 1420r/min$ ，第Ⅱ轴的转速 $u_H = 762r/min$ ，第Ⅴ轴的最低转速 $u_L = 30r/min$ ，各变速组齿轮的最小齿数分别为16、18、19齿，公比 $F = 1.26$ （即 φ 值）。

将以上数据从键盘输入后，计算机将自动算出变速组的最小传动比，各组的主动轮和从动轮的齿数及18级转速值，最后显示打印转速图。图4具体数值如下：

RATIOS OF GEARS

DRIVE	DRIVEN
19	37
22	34
28	35
39	24
63	32

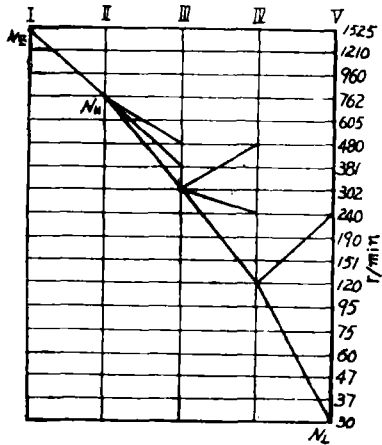


图 4

• 本程序在APPLE—Ⅱ机上实现，因限于篇幅，程序未全附上。

R.P.M OF SPINDLE

30	37	47
60	75	95
120	151	190
240	302	381
480	605	762
960	1210	1525

结 论

利用以上推证出来的理论公式来设计变速机构传动比的分配方案，就能很容易地得到传动比分配的最佳值，改变了长期以来罗列多种方案，画出图型，逐一对比、从中选一的繁琐方法。该公式不仅适用于机床传动机构中转速图的设计，而且对其他传动机构，如汽车、拖拉机、升降机构等一切有级变速的传动系统，也都适用。更重要的是为计算机辅助设计提供了数学上的依据，因此该公式有较重要的实用价值。

参 考 文 献

[1] 阿切尔康，金属切削机床的设计与计算，机械工业出版社，（1596）·
[2] 吉林工大等编，金属切削机床设计（修订本），上海科技出版社，（1985），54。
[3] Acherkan, N, Machine Tool Design, Mir Publishers, Moscow, (1982).

A New Method for Distributing the Transmission Ratio of
Step Changing System in Machine Tool

Feng Zhonghuan

Abstract

This paper provides a practical formula for calculating the transmission ratio of step chnaging system in machine tool, and demonstrates it, at the same time gives the program for its computation.