第8卷 第1期
1987年2月

华侨大学学报
JOURNAL OF HUACHIAO UNIVFRSITY

Vol.8 No.1
Feb. 1987

螺象函数之λ-幂的系数估计

陈跃庆

（应用数学系）

摘要

记单位圆 $|z|<1$ 上正则、单叶且满足条件 $f(0)=f'(0)-1=0$ 和

$$R_e e^{-i\Psi}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0,\quad (|z|<1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\Psi\leqslant\frac{\pi}{2})$$

的函数全体为 S_t. 本文中我们证明了下述定理，推广了一些已知的结果[1—4]. 作为定理1的一个推论，我们证明了 Szègö 的一个猜测在 S_t 中成立.

定理1 设 $f\epsilon S_t$, $\lambda>0$, $\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$, 则

$$\frac{|D_n(\lambda)|}{d_n(2\lambda)}\leqslant 1,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

等号仅限于 Koebe 函数 $f(z)=\frac{z}{(1-\eta z)^2}(|\eta|=1)$成立，$d_n(\alpha)$为函数$\frac{1}{(1-x)^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}d_n(\alpha)z^n$的第$(n+1)$项系数.

定理2 设 $f\epsilon S_t$, $\lambda\geqslant 1$, $\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$, 则

$$\frac{\left||D_n(\lambda)|-|D_{n-1}(\lambda)|\right|}{d_n(2\lambda-1)}\leqslant 1,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

当 $\lambda=1$ 时，等号仅对于具有形式 $f(z)=\frac{z}{(1-\eta_1 z)(1-\eta_2 z)}$的函数成立；当 $\lambda>1$ 时，等号成立仅限于 Koebe 函数. 这里，记号 $d_n(\alpha)$的意义同定理1.

本文1986年3月27日收到.

一、引　言

记单位圆内解析的、单叶的、满足$f(0)=f'(0)-1=0$的函数全体为S。S中满足条件

$$R_e e^{-i\Psi}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \qquad \left(|z|<1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\Psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

的子类记作S_t，S_t中的函数称为螺象函数。特别地，把具有$\Psi=0$的f全体记作S^*，它是人们所熟知的星象函数类。

设　$f\in S_t$，$\lambda>0$，　$\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^\lambda=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$。我们称$D_n(\lambda)$为$S_t$中函数$f$的幂函数之Taylor系数。对于$S_t$中的函数的Taylor系数，已知[1]有$|D_n(1)|\leqslant n+1$，即Bieberbach猜想对$S_t$族成立；而对于$S_t$中的奇函数$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$则成立$|a_{2n+1}|=|D_{2n}(1)|\leqslant1(n=1,2,\cdots$。见文[2]）。

1963年Pommerenke[3]证明：当$f\in S^*$时，或者

$$|D_n(1)-e^{-i\theta}D_{n-1}(1)|=O(n^{-\delta}),\quad n\to\infty$$

对某个实数θ和$\delta>0$成立，或者对某两个实数θ_1和θ_2，成立

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{-i\theta_1}z)(1-e^{-i\theta_2}z)} \tag{1}$$

易见对于式（1）中的f有

$$|D_n(1)-e^{-i\theta_1}D_{n-1}(1)|=1.$$

他还猜测对一切$f\in S^*$成立$\big||D_n(1)|-|D_{n-1}(1)|\big|\leqslant1$，等号成立限于形式（1）的函数。此猜测于1978年为Leung Yuk[4]所证实。

本文中，我们将推广上述各结果。作为所得结果的一个有趣的推论，我们证明了Szegö的一个猜测在S_t类中成立。

我们的结果可以叙述为下面的

定理1　设$f\in S_t$，$\lambda>0$，$\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^\lambda=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$，则

$$\frac{|D_n(\lambda)|}{d_n(2\lambda)}\leqslant1,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{2}$$

等号仅限于Koebe函数$f(z)=\frac{z}{(1-\eta z)^2}(|\eta|=1)$成立，$d_n(\alpha)$为函数$\frac{z}{(1-z)^\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}d_n(\alpha)z^n$的第$n+1$项系数。

定理2　设$f\in S_t$，$\lambda\geqslant1$，$\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^\lambda=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$，则

$$\frac{\big||D_l(\lambda)|-|D_{n-1}(\lambda)|\big|}{d_n(2\lambda-1)}\leqslant 1,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{3}$$

当 $\lambda=1$ 时，等号仅对于具有形式（1）的函数才能成立；当 $\lambda>1$ 时，等号成立仅限于Koebe 函数。这里，记号 $d_n(\alpha)$ 的意义同定理1。

二、定理1的证明

我们要用到下述的

引理 A[5]　设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_nz^n=\exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_kz^k\right\}$，其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_kz^k$ 在单位圆内解析。设 $s>0$，$\Delta_n(s)=\frac{1}{s^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k|\alpha_k|^2-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，则

$$|B_n|\leqslant d_n(s)\exp\left\{\frac{s}{2d_n(s)}\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(s-1)\Delta_k(s)\right\}$$

其中 $d_n(s)$ 是函数 $\frac{1}{(1-z)^s}=d_n(s)z^n$ 的第（$n+1$）项系数，等号仅当 $\alpha_k=-\frac{s}{k}\eta^k$ ($k=1$，2，…，n；$|\eta|=1$）时才能实现。

引理1　设 $f\epsilon S_l$，$\log\frac{f(z)}{z}=2\sum\limits_{k=1}^{\infty}r_kz^k$，　则 $|r_k|\leqslant\frac{1}{k}$（$k=1$，2，3，…），等号由Koebe 函数所达到。

事实上

$$2\sum_{k=1}^{\infty}kr_kz^k=z\left(\sum_{k=1}^{\infty}2r_kz^k\right)'=z\left(\log\frac{f(z)}{z}\right)'=\frac{zf'(z)}{f(z)}-1$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}2r_kkz^k=\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

由假设 $f\epsilon S_l$，故有 Ψ，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\Psi\leqslant\frac{\pi}{2}$，　使得 $\mathrm{Re}\,e^{-i\Psi}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0(|z|<1)$。令 $p(z)=1-e^{-i\Psi}+e^{-i\Psi}\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}2kr_ke^{-i\Psi}z^k$，因 $\mathrm{Re}\,p(z)>0$（$|z|<1$）；故由熟知的结果有

$$|2kr_ke^{-i\Psi}|\leqslant 2,\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

即

$$|r_k|\leqslant\frac{1}{k},\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

且易见Koebe 函数使上式等号成立。

我们转入定理1的证明。设 $f\epsilon S_l$，$\lambda>0$。考察等式

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n=\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}2\lambda r_kz^k\right\}$$

在引理 A 中取 $s=2\lambda$，由引理1有

$$\Delta_n(2\lambda)=\frac{1}{(2\lambda)^2}\sum_{k=1}^{n}k|2\lambda r_k|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\right)=0$$

且等式仅当 $2\lambda r_k=\frac{2\lambda}{k}\eta^k(|\eta|=1)$ 时才能实现。由引理 A 我们有

$$\frac{|D_n(\lambda)|}{d_n(2\lambda)}\leqslant\exp\left\{\frac{2\lambda}{2d_n(2\lambda)}\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-1)\Delta_k(2\lambda)\right\}\tag{4}$$

当 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$d_n(2\lambda-1)\geqslant0$ $(n=1,2,\cdots)$。但因 $\Delta_n(2\lambda)\leqslant0$，$(n=1,2,\cdots)$，从而

$$\frac{\lambda}{d_n(2\lambda)}\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-1)\Delta_k(2\lambda)\leqslant0$$

于是由(4)即得 $\frac{|D_n(\lambda)|}{d_n(2\lambda)}\leqslant1$。

当 $0<\lambda<\frac{1}{2}$ 时，我们注意到

$$\Delta_n(2\lambda)-\Delta_{n-1}(2\lambda)=n|r_n|^2-\frac{1}{n}\leqslant0$$

从而 $\Delta_n(2\lambda)\leqslant0$ 为单调下降序列，于是若 $\Delta_n(2\lambda)=0$，则 $\Delta_k(2\lambda)=0$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，此时显然有

$$\frac{\lambda}{d_n(2\lambda)}\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-1)\Delta_k(2\lambda)=0\tag{5}$$

若 $\Delta_n(2\lambda)\neq0$，则 $0\leqslant\frac{\Delta_k(2\lambda)}{\Delta_n(2\lambda)}\leqslant1$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，此时有（注意 $d_n(2\lambda-1)<0$，当 $n\geqslant1$ 时）

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{d_n(2\lambda)}\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-1)\Delta_k(2\lambda)&=\frac{\lambda\Delta_n(2\lambda)}{d_n(2\lambda)}\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-1)\frac{\Delta_k(2\lambda)}{\Delta_n(2\lambda)}\\&=\frac{\lambda\Delta_n(2\lambda)}{d_n(2\lambda)}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}d_{n-k}(2\lambda-1)\frac{\Delta_k(2\lambda)}{\Delta_n(2\lambda)}\right\}\\&\leqslant\frac{\lambda\Delta_n(2\lambda)}{d_n(2\lambda)}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}d_{n-k}(2\lambda-1)\right\}\\&=\lambda\Delta_n(2\lambda)\frac{1+\sum_{k=1}^{n-1}d_k(2\lambda-1)-d_n(2\lambda-1)}{d_n(2\lambda)}\\&=\lambda\Delta_n(2\lambda)\left(1-\frac{d_n(2\lambda-1)}{d_n(2\lambda)}\right)\leqslant0\end{aligned}\tag{6}$$

由式(5)、式(6)及式(4)即得 $\frac{|D_n(\lambda)|}{d_n(2\lambda)}\leqslant1$ 对 $0<\lambda<\frac{1}{2}$ 也成立。

若 $\frac{|D_n(\lambda)|}{d_n(2\lambda)}=1$，则由上述证明过程知此时必有 $r_k=\frac{1}{k}\eta^k$ $(|\eta|=1)$，$k=1,2,\cdots$，

n。特别地，我们有 $|r_1|=\frac{1}{2}|a_2|=1$，这里 a_2 为函数 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 的第二项系数，从而我们有 $|a_2|=2$，即 $f(z)$ 必为 Koebe 函数，定理 1 证毕。

推论 1 设 $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{2n+1}\epsilon S_t$，则 $|a_n|\leqslant 1$。等号由且只由函数 $f(z)=\frac{z}{1-\eta z^2}$（$|\eta|=1$）所达到。

证 令 $g(z)=f^2(z^{\frac{1}{2}})$，则 $\left\{\frac{g(z)}{z}\right\}^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$，$f(z)=g^{\frac{1}{2}}(z^2)$ 且

$$\mathrm{Re}e^{-i\Psi}\frac{zg'(z)}{g(z)}=\mathrm{Re}e^{-i\Psi}\frac{z^{\frac{1}{2}}f'(z^{\frac{1}{2}})}{f(z^{\frac{1}{2}})}>0,\quad |z|<1$$

故 $g(z)\epsilon S_t$。取 $\lambda=\frac{1}{2}$ 并应用定理 1 于 $g(z)$，即得 $|a_n|\leqslant 1$。当 $|a_n|=1$ 时，由定理 1 知必有 $g(z)=\frac{z}{(1-\eta z)^2}$，故 $f(z)=\frac{z}{1-\eta z^2}$（$|\eta|=1$）。

推论 2 设 $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}^{(p)}z^{np+1}\epsilon S_t$，（$p$ 为任一固定的自然数），则 $|a_{n+1}^{(p)}|=O(n^{\frac{2}{p}-1})$，即 Szegö 猜测在 S_t 类上成立。

注 1 由于 Littlewood 已举出反例说明 Szegö 猜测对于 $S_p=\left\{f\epsilon S,\ f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}^{(p)}z^{np+1}\right\}$ 类不成立（$p\geqslant 4$）。因而推论 2 可知定理 1 一般不能推广到 S 类上。

三、定理 2 的证明

我们需要下述的

引理 2 设 $p(z)=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$，$\lambda>0$，$\mathrm{Re}p(z)>0$（$|z|<1$），$q(z)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{1+c}{2}p_kz^k$（$n$ 为任一自然数），其中 $c=e^{2i\Psi}\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$\lambda_k\geqslant 0$（$k=1,2,\cdots,n$），又设 $M=\max_{|z|=1}\mathrm{Re}q(z)$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left|\frac{1+c}{2}\right|^2\leqslant 2\lambda M$$

事实上，若

$$p(z)=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)z^n$$

$$\frac{1+c}{2}=re^{i\Psi}$$

则

$$\mathrm{Re}p(e^{i\theta})=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta-b_n\sin n\theta)\geqslant 0$$

$$\mathrm{Re}q(e^{i\theta})=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k r[a_k\cos(k\theta+\Psi)-b_k\sin(k\theta+\Psi)]$$

从而我们有

$$2\pi\lambda M\geqslant\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}p(^{i\theta})\mathrm{Re}q(e^{i\theta})d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\theta-b_n\sin n\theta)\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda_k r(a_k\cos(k\theta+\Psi)-b_k\sin(k\theta+\Psi))\right]d\theta$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(r\cos\Psi)(a_k{}^2+b_k{}^2)$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(\mathrm{Re}\,\frac{1+c}{2}\right)\left|\,p_k\,\right|^2 \tag{7}$$

注意到

$$\left|\frac{1+c}{2}\right|^2=\cos^2\varphi=\mathrm{Re}\frac{1+c}{2},\quad c=e^{2i\varphi}$$

由式（7）得

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left|\frac{1+c}{2}\right|^2|p_k|^2\leqslant 2\lambda M$$

引理2的推论　设 $p(z)=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$ 满足 $\mathrm{Re}p(z)>0$，$(|z|<1)$，$q(z)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{1+c}{2}p_kz^k$，$\lambda_k\geqslant 0\,(1\leqslant k\leqslant n)$，$c=e^{2i\varphi}$，$M=\max\limits_{|z|=1}\mathrm{Re}q(z)<\infty$，则存在 $\xi_0=\xi_0(n)$ 满足 $|\xi_0|=1$，且使得

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left|\frac{1+c}{2}p_k-\xi_0{}^k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k+2(\lambda-1)M \tag{8}$$

事实上，设 ξ 满足 $|\xi|=1$，应用引理2得

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left|\frac{1+c}{2}p_k-\xi^k\right|^2=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left|\frac{1+c}{2}\right|^2|p_k|^2-2\mathrm{Re}\{q(\xi)\}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$$

$$\leqslant 2\lambda M-2\mathrm{Re}\{q(\xi)\}+\sum_{n=1}^{n}\lambda_k$$

取 ξ_0 满足 $|\xi_0|=1$，且使得 $\mathrm{Re}q(\xi_0)=M$，即得式（8）。

我们转入定理2的证明。设 $f\epsilon S_t$，$\lambda\geqslant 1$，依定义存在 Ψ．$-\frac{\pi}{2}\leqslant\Psi\leqslant\frac{\pi}{2}$，使得 $\mathrm{Re}e^{-i\Psi}$

$\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$（$|z|<1$）。令 $g(z)=\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}$ 则

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\lambda\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right\}$$

于是若令 $h(z)=\lambda+\frac{zg'(z)}{g(z)}=\lambda\frac{zf'(z)}{f(z)}$，则 $h(z)$ 可表为

$$h(z)=\lambda\frac{1-c}{2}+\frac{1+c}{2}p(z)=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}h_n z^n,\quad c=e^{2i\Psi}$$

其中 $p(z)=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n$ 满足 $\operatorname{Re}p(z)>0$（$|z|<1$）。又因为

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda r_k z^k=\log\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=\log g(z)=\int_0^z\frac{h(z)-\lambda}{z}dz$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}h_k z^k \tag{9}$$

其中 $h_k=\frac{1+c}{2}p_k$（$k=1,2,\cdots$）。于是对 ξ，$|\xi|=1$ 我们有

$$\log(1-\xi z)\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1+c}{z}p_k-\xi^k\right)z^k$$

另一方面，我们还有

$$(1-\xi z)\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(D_n(\lambda)-\xi D_{n-1}(\lambda))z^n,\quad D_0=1$$

令 $\Delta_k(2\lambda-1)=\frac{1}{(2\lambda-1)^2}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\left|\frac{1+c}{2}p_l-\xi^l\right|^2-\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}$，在引理 A 中取 $s=2\lambda-1\geqslant1$，我们有

$$|D_n(\lambda)-\xi D_{n-1}(\lambda)|\leq d_n(2\lambda-1)\exp\left\{\frac{2\lambda-1}{2d_n(2\lambda-1)}\sum_{k=1}^{\infty}d_{n-k}(2\lambda-2)\Delta_k(2\lambda-1)\right\} \tag{10}$$

置 $q(z)=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=l}^{n}\frac{d_{n-k}(2\lambda-2)}{(2\lambda-2)}\frac{1}{l}\right)\frac{1+c}{2}p_l z^l\equiv\sum_{l=1}^{n}\lambda_l p_l\frac{1+c}{2}z^l$，由式（8）得（适当选取 ξ）

$$\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-2)\Delta_k(2\lambda-1)=\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-2)\left[\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{(2\lambda-1)^2}\frac{1}{l}\left|\frac{1+c}{2}p_l-\xi^l\right|^2-\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right]$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=l}^{n}\frac{d_{n-k}(2\lambda-2)}{(2\lambda-1)^2}\frac{1}{l}\right)\left|\frac{1+c}{2}p_l-\xi^l\right|^2-\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n}d_{n-k}(2\lambda-2)\frac{1}{l}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\left|\frac{1+c}{2}p_l-\xi^l\right|^2-\sum_{l=1}^{n}(2\lambda-1)^2\lambda_l$$

$$\leq2(\lambda-1)M-4\lambda(\lambda-1)\sum_{l=1}^{n}\lambda_l \tag{11}$$

由于

$$M=\max_{|z|=1}\quad \mathrm{Re}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\frac{1+c}{2}p_l z^l\leq\sum_{l=1}^{n}\lambda_l|p_l|\leq 2\lambda\sum_{l=1}^{n}\lambda_l \tag{12}$$

故由式（11）有

$$\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-2)\Delta_k(2\lambda-1)\leq 4\lambda(\lambda-1)\sum_{l=1}^{n}\lambda_l-4\lambda(\lambda-1)\sum_{l=1}^{n}\lambda_l=0$$

于是式（10）变成

$$\frac{|D_n(\lambda)-\xi D_{n-1}(\lambda)|}{d_n(2\lambda-1)}\leqslant\exp\left\{\frac{2\lambda-1}{2d_n(2\lambda-1)}\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}(2\lambda-2)\Delta_k(2\lambda-1)\right\}\leq 1$$

从而

$$\frac{\|D_n(\lambda)|-|D_{n-1}(\lambda)\|}{d_n(2\lambda-1)}\leqslant\frac{|D_n(\lambda)-\xi D_{n-1}(\lambda)|}{d_n(2\lambda-1)}\leqslant 1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

当 $\lambda>1$ 时，若 $\dfrac{\|D_n(\lambda)|-|D_{n-1}(\lambda)\|}{d_n(2\lambda-1)}=1$，则上述证明中的不等式应 全 部 变做等式．由式（12）易见此时应有 $c=1$，即 $\Psi=0$，又由引理 A 知此时必有

$$\frac{1}{l}(p_l-\xi^l)=\frac{2\lambda-1}{l}\eta^l,\quad l=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\quad |\eta|=1$$

此即 $p_l=(2\lambda-1)\eta^l+\xi^l(1\leqslant l\leqslant n)$．但由式（12）知此时应有 $|p_l|=2\lambda(1\leqslant l\leqslant n)$，故 $\eta^l=\xi_l$ 对一切 $1\leqslant l\leqslant n$ 成立。另一方面再由式（ 9 ），我们有 $h_l=p_l=2\lambda l\ r_l(1\leqslant l\leqslant n)$，必须 $r_l=\dfrac{1}{l}\eta^l(|\eta|=1)$。特别地，$|r_1|=\left|\dfrac{a_2}{2}\right|=1$，其中 $a_2=D_1(1)$，因此 $f(z)$为 Koebe 函数。对 $\lambda=1$ 的情形，由式（12）已知使 $\dfrac{||D_n(1)|-|D_{n-1}(1)||}{d_n(1)}=1$ 成立的极值函数 $f(z)\epsilon S^*$，而 S^* 中的极值函数是已知的[3]．定理 2 证毕。

推论　当 $f\epsilon S_l$，$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ 时，$||a_n|-|a_{n-1}||\leqslant 1$，$(n=2,\ 3,\ \cdots)$，$a_1=1$．等式成立仅限于具有形式（ 1 ）的函数。

注 2　对一般的 λ，$\dfrac{1}{2}<\lambda<1$，我们考虑函数

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^{\alpha}},\quad(0<\alpha<2)$$

则$\left\{\dfrac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=\dfrac{1}{(1-z)^{\alpha\lambda}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}d_n(\alpha\lambda)z^n$．取 $\alpha=\dfrac{2(1-\lambda)-\varepsilon(\lambda)}{\lambda}$，其中 $\varepsilon(\lambda)$是仅与 λ 有关的充分小的正数，使得 $1>\lambda>\dfrac{1}{2}$时，$0<\alpha<2$．容易算出

$$\frac{|d(\alpha\lambda)-d_0(\alpha\lambda)|}{f(2\lambda-1)}=\frac{1-\alpha\lambda}{2\lambda-1}=\frac{2\lambda-1+\varepsilon(\lambda)}{2\lambda-1}>1$$

另外，也易见当 $0<\alpha<2$ 时

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}=\mathrm{Re}\frac{1+(\alpha-1)z}{1-z}>0\ (|z|<1)$$

故 $f(z)\in S^*\subset S_t$。 这个例子说明对于 $\frac{1}{2}<\lambda<1$ 的正数 λ，定理 2 一般是不成立的。但我们可以仿照定理 1 的证明，利用巴齐列维奇不等式获得对于 $\frac{1}{2}<\lambda<1$ 的正数 λ，当 $f\in S_t$ 且 $f(z)$ 的 Hayman 常数 $\alpha_f=\lim\limits_{r\to 1}(1-r)^2\max\limits_{|z|=r}|f(z)|>0$ 时，成立

$$\frac{||D_n(\lambda)|-|D_{n-1}(\lambda)||}{d_n(2\lambda-1)}\leqslant\left(\frac{1}{\alpha_f}\right)^{\frac{\lambda}{2(2\lambda-1)}}$$

参 考 文 献

〔1〕Nevanlinna, R. Über Die Konforme Abbildung von Sterngebieten, Öfvers. Finska Uet. Soc. Förh, 53, 6 (1921).

〔2〕Privalov, I., On Functions Giving a Univalent Conformal Mapping, Mat. Sb., 31 (1924). 350—365.

〔3〕Pommerenke, C., On Starlike and Close-to-convex Functions, Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 290—304.

〔4〕Leung Yuk, Successive Coefficients of Starlike Functions, Bull. London Math. Soc., 10 (1978), 193—196.

〔5〕Milin, I., Univalent Functions and Orthonornal Systems, Amer. Math. Soc. Providence, (1977), 32—37.

Coefficient Estimates for λ-Powers of Spirallike Functions

Chen Yueqing

Abstract

Let St denote the class of functions which are regular and univalent in unit disc $|z|<1$ and satisfy the following conditions:

$$f(0)=f'(0)-1=0$$

$$\mathrm{Re}\ e^{i\Psi}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0,\quad (|z|<1,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\Psi\leqslant\frac{\pi}{2})$$

The following theorems which generalize some known results[1—4] are proved. As a corollary of Theorem 1, a conjecture put forward by Szegö in S_t is proved.

Theorem 1. Let $f\epsilon S_t$, $\lambda>0$, $\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$, then

$$\frac{|D_n(\lambda)|}{d_n(2\lambda)}\leqslant 1,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

where $d_n(\alpha)$ is the $(n+1)$th coefficient of the function $\frac{z}{(1-z)^{\alpha}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n(\alpha)z^n$.

Equality holds only for the Koebe function $f(z)=\frac{z}{(1-\eta z)^2}$ $(|\eta|=1)$.

Theorem 2. Let $f\epsilon S_t$, $\lambda\geq 1$, $\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^{\lambda}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$, then

$$\frac{||D_n(\lambda)|-|D_{n-1}(\lambda)||}{d_n(2\lambda-1)}\leqslant 1,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

Where $d_n(\alpha)$ is the same as that in Theorem 1. Equality holds only for

$$f(z)=\frac{z}{(1-\eta_1 z)(1-\eta_2 z)}(|\eta_1|=|\eta_2|=1)\ \text{or}\ f(z)=\frac{z}{(1-\eta z)^2}(|\eta|=1)$$

in case of $\lambda=1$ or $\lambda>1$ respectively.