第8卷 第1期　　华 侨 大 学 学 报　　Vol.8 No.1
1987年2月　　JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY　　Feb. 1987

平 面 格 图 的 圈 数

王 志 雄

（应用数学系）

摘　　要

设 $f(m,n)$ 和 $f_{2l}(m,n)$ 分别是平面上 $m\times n$ 格图的圈数和长为 $2l$ 的圈数。

本文给出 $f(3,n)$ 的递推公式，$f_{2l}(2,n)$ 的闭公式和 $f(m,n)$ 的递推式阶的上界估计。

一、问题的提出

平面上的 $m\times n$ 格图指的是以 (x,y) $(x=0,1,\cdots,m;\ y=0,1,\cdots,n)$ 为顶点的图，顶点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 邻接，当且仅当 $x_1=x_2$，$|y_1-y_2|=1$ 或 $|x_1-x_2|=1$，$y_1=y_2$。

我们用 $f(m,n)$ 表示 $m\times n$ 格图中圈的总数，$f_l(m,n)$ 表示其中长为 l 的圈的总数。

这类圈数的研究，对运筹学中的图上作业法，线路设计和分子结构等，均有一定意义。

文[1]仅对 $m=1$ 和 2 的情况，求得 $f(m,n)$ 的表示式，对 $m=1$ 的情况，求得 $f_l(m,n)$ 的表示式．对一般的 m，认为"求 $f(m,n)$ 是困难的，求 $f_l(m,n)$ 也是困难的"．

本文将给出 $f(3,n)$ 的递推式及其生成函数，对一般的 m，估计 $f(m,n)$ 的递推式的阶，并给出 $f_l(2,n)$ 的闭公式。

本文的方法可用以对任意 m，求得 $f(m,n)$ 及 $f_l(m,n)$ 的递推式，当然，随着 m 的增加，需要迅速增加的计算量，这唯有求助于计算机及好的算法．

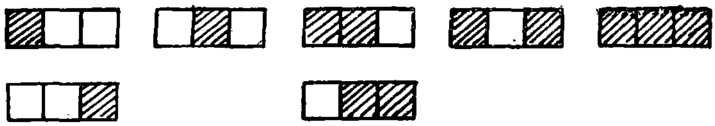
二、关于 $f(3,n)$

$3\times n$ 格图的圈，根据它最上一行所含方格的情况，可分为五类，如图1所示。

用斜纹标出的格表示含在圈内.(1)、(3) 两类中的两种形式，其一是另一个关于直线

本文1985年12月24日收到．

$x=\frac{3}{2}$的镜对称像，其余三类关于$x=\frac{3}{2}$是对称的。



(1) (2) (3) (4) (5)

图 1

第 k 类且恰含 t 行（通过沿纵轴平移而重合的两圈，视为同一，下对“恰含 t 行”的理解同此）的不同圈的数目记为 $a_{t,k}$，第 4 类且由两个不相交圈组成的恰含 t 行的圈的数目记为 $a^*_{t,4}$，则有

$$\begin{cases} a_{t+1,1}=a_{t,1}+a_{t,3}+a_{t,4}+a_{t,5} \\ a_{t+1,2}=a_{t,2}+2a_{t,3}+a_{t,5} \\ a_{t+1,3}=a_{t,1}+a_{t,2}+2a_{t,3}+a_{t,5} \\ a_{t+1,4}=a_{t,4}+a_{t,5} \\ a_{t+1,5}=2a_{t,1}+a_{t,2}+2a_{t,3}+a_{t,5}+a^*_{t,4} \\ a^*_{t+1,4}=2a_{t,1}+a^*_{t,4} \end{cases} \tag{1}$$

设 $b_3(t)$表示至多 3 列，恰含 t 行的不同圈的数目，则

$$b_3(t)=2a_{t,1}+a_{t,2}+2a_{t,3}+a_{t,4}+a_{t,5} \tag{2}$$

设

$$A_k(x)=\sum_{t=1}^{\infty}a_{t,k}x^t,\ (k=1,2,3,4,5)$$

$$A^*_4(x)=\sum_{t=1}^{\infty}a^*_{t,4}x^t$$

$$B_3(x)=\sum_{t=1}^{\infty}b_3(t)x^t$$

由式(2)得

$$B_3(x)=2A_1(x)+A_2(x)+2A_3(x)+A_4(x)+A_5(x) \tag{3}$$

又因[1]

$$f(3,n)=\sum_{t=1}^{n}(n-t+1)b_3(t)$$

故 $\{f(3,n)\}$ 的生成函数

$$F_3(x)=B_3(x)/(1-x)^2 \tag{4}$$

由递推式(1)，结合显然的初值 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{15}=a^*_{14}=1$，$a_{14}=0$ 得

$$\begin{cases} A_1(x)-x=xA_1(x)+xA_3(x)+xA_4(x)+xA_5(x) \\ A_2(x)-x=xA_2(x)+2xA_3(x)+xA_5(x) \\ A_3(x)-x=xA_1(x)+xA_2(x)+2xA_3(x)+xA_5(x) \\ A_4(x)=xA_4(x)+xA_5(x) \\ A_5(x)-x=2xA_1(x)+xA_2(x)+2xA_3(x)+xA_5(x)+xA^*_4(x) \\ A^*_4(x)-x=2xA_1(x)+xA^*_4(x) \end{cases} \tag{5}$$

解得

$$A_1(x)=x-4x^2+7x^3-5x^4-x^5/1-7x+12x^2-7x^3+3x^4+2x^5$$
$$A_2(x)=x-3x^2+5x^3-7x^4+3x^5+x^6/1-7x+12x^2-7x^3+3x^4+2x^5$$
$$A_3(x)=x-2x^2+x^3-2x^5/1-7x+12x^2-7x^3+3x^4+2x^5$$
$$A_4(x)=x^2+x^3-6x^4+x^5+x^6/1-7x+12x^2-7x^3+3x^4+2x^5$$
$$A_5(x)=x-7x^3+7x^4-x^6/1-7x+12x^2-7x^3+3x^4+2x^5$$

由式(3)得

$$B_3(x)=6x-14x^2+15x^3-16x^4-2x^5+x^6/1-7x+12x^2-7x^3+3x^4+2x^5 \tag{6}$$

综上所述，我们有

定理1　$f(3,n)$的生成函数

$$F_3(x)=\frac{x(6-14x+15x^2-16x^3-2x^4+x^5)}{(1-x)^2(1-7x+12x^2-7x^3+3x^4+2x^5)}$$

$$=-\frac{5x}{2(1-x)}-\frac{5x}{2(1-x)^2}+\frac{x(22-59x+45x^2-13x^3-10x^4)}{2(1-7x+12x^2-7x^3+3x^4+2x^5)}$$

故满足递推公式

$$f(3,n+5)=7f(3,n+4)-12f(3,n+3)+7f(3,n+2)-3f(3,n+1)-2f(3,n)-5(2n+3),$$
$$n=0,1,2,\cdots f(3,0)=0,f(3,1)=6,\ f(3,2)=40,\ f(3,3)=213,\ f(3,4)=1049$$

三、关于 f(m, n)

考虑$m\times n$格图的圈，根据它最上一行所含方格的情况，可如下分类：当$m=2p+1$是奇数时，含s格，且这s格是相联的，有$(m+1-s)$类，当s为奇数时，有一类的最上一行关于直线$x=m/2$对称，其余的可两两配对，使每一对的其中一个的最上一行是另一个关于直线$x=m/2$的镜对称像，故不对称的类有$\left[\frac{m+2-s}{2}\right]$个，从而，相联的不对称类有$\sum_{s=1}^{m}\left[\frac{m+2-s}{2}\right]=\left[\left(\frac{m+1}{2}\right)^2\right]$个。

含s格，且这s格不相联的，有$\binom{m}{s}-(m+1-s)$类，当$s=2j+1$为奇数时，有$\binom{p}{j}-1$类的最上一行关于$x=m/2$对称；当$s=2j$为偶数时，有$\binom{p}{j}$类的最上一行关于$x=m/2$对称；其余的可如上段所述两两配对，故不相联的不对称类有

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\binom{2p+1}{2j}\cdot(2p+2-2j)+\binom{p}{j}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{p}\binom{2p+1}{2j+1}\cdot(2p+1-2j)+\binom{p}{j}-1$$

$$=2^{2p}+2^{p}-1-(p+1)^{2}.$$

正如当 $m=3$ 时的方程组(5)，对一般的 $m=2p+1$，我们可得含 $\triangle(m)=2[2^{2p}+2^{p}-1-(p+1)^{2}]+(p+1)^{2}=2^{2p+1}+2^{p+1}-2-(p+1)^{2}=2^{m}+2^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}-2-\left[\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2}\right]$ 个未知函数的方程组，其系数是至多为一次的函数，由 Gramer 法则，其解是分母至多为 $\triangle(m)$ 次的有理函数。

当 m 为偶数时，情况类似，结论相同。

用 $b_m(t)$ 表示至多 m 列恰含 t 行的不同圈的数目，则有

定理 2 $b_m(t)(t=1,2,\cdots)$ 的生成函数 $B_m(x)$ 是分母至多为 $\triangle(m)$ 次的有理函数，故 $f(m,n)$ 的生成函数 $F_m(x)=B_m(x)/(1-x)^2$ 是分母至多为 $\triangle(m)+2$ 次的有理函数，从而 $f(m,n)$ 满足一个阶数至多为 $\triangle(m)$ 阶的非齐次递推式。

注：定理 2 的估计不是最佳可能的，比如 $\triangle(3)=6$，由式(6)及定理 1，$B_3(x)$ 是分母为 5 次的有理函数，而 $f(3,n)$ 满足一个五阶递推式，我们期待着对本定理的改进。

四、关于 $f_l(2,n)$

首先，注意到长为奇数的圈是不存在的。我们用 $a_{t,j,l}$ 表示至多 2 列，恰含 t 行，最上一行恰含 j 格，长为 $2l$ 的圈的数目，则

$$\begin{cases} a_{t+1,1,l+1}=a_{t,1,l}+a_{t,2,l} \\ a_{t+1,2,l+1}=2a_{t,1,l-1}+a_{t,2,l} \end{cases} \tag{7}$$

令

$$A_k(x,y)=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{t,k,l}x^ty^l,$$ 利用初值

$$a_{1,1,2}=1,\quad a_{1,1,l}=a_{t,1,1}=0,\quad (l\neq 2,t\geqslant 1)$$

$$a_{1,2,3}=1,\quad a_{1,2,l}=a_{t,2,1}=0,\quad (l\neq 3,\ t\geqslant 1)$$

及递推式(7)，得

$$(1-xy)A_1(x,y)-xyA_2(x,y)=xy^2$$

$$-2xy^2A_1(x,y)-(1-xy)A_2(x,y)=xy^3$$

故

$$A_1(x,y)=\frac{xy^2(1-xy+xy^2)}{1-2xy+x^2y^2-2x^2y^3}$$

$$A_2(x,y)=\frac{xy^3(1+xy)}{1-2xy+x^2y^2-2x^2y^3}$$

记至多 2 列，恰含 t 行，长为 $2l$ 的圈数为 $b_l(t)$，令

$$B(x,y)=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_l(t)x^ty^l$$

则

$$B(x,y)=2A_1(x,y)+A_2(x,y)=\frac{xy^2(2+y-2xy+3xy^2)}{1-2xy+x^2y^2-2x^2y^3}$$

$$=\frac{xy^2(\sqrt{y}+\sqrt{2})^2}{2[1-(y+\sqrt{2y^3})x]}+\frac{xy^2(\sqrt{y}-\sqrt{2})^2}{2[1-(y-\sqrt{2y^3})x]}$$

$$=\frac{xy^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\sqrt{y}+\sqrt{2})^2(y+\sqrt{2y^3})^n+(\sqrt{y}-\sqrt{2})^2(y-\sqrt{2y^3})^n\right]x^n$$

故

$$\sum_{l=1}^{\infty}b_l(n)y^l=\frac{y^2}{2}\left[(\sqrt{y}+\sqrt{2})^2(y+\sqrt{2y^3})^{n-1}+(\sqrt{y}-\sqrt{2})^2(y-\sqrt{2y^3})^{n-1}\right]$$

$$=y^2\left[(2+y)\sum_{j=0}\binom{n-1}{2j}\cdot 2^j\cdot y^{n-1+j}+2\sum_{j=0}\binom{n-1}{2j+1}2^{j+1}y^{n+j}\right]$$

从而

$$b_l(n)=2^{l-n}\binom{n-1}{2l-2n-3}+2^{l-n}\binom{n-1}{2l-2n-2}+2^{l-n-2}\binom{n-1}{2l-2n-4}$$

$$=2^{l-n-2}\left[\binom{n-1}{2l-2n-4}+4\binom{n}{2l-2n-2}\right]$$

因为　$f_{2l}(2,n)=\sum_{t=1}^{n}(n-t+1)b_l(t)$，故有

定理3　$2\times n$ 格图中长为 $2l$ 的圈数

$$f_{2l}(2,n)=\sum_{t}(n-t+1)2^{l-t-2}\left[\binom{t-1}{2l-2t-4}+4\binom{t}{2l-2t-2}\right]$$

和展布在$[1,n]$中，使组合式非零者，即$2l-3/3\leqslant t\leqslant\min(n,l-1)$。

因为 $2^{l-t-2}\binom{t-1}{2l-2t-4}$为$(1+\sqrt{2}x)^{t-1}$关于 x 的展开式中 $x^{2l-2t-4}$ 的系数，

$(l-t-2)2^{l-t-2}\binom{t-1}{2l-2t-4}$为$\frac{\sqrt{2}}{2}(t-1)(1+\sqrt{2}x)^{t-2}$展开式中 $x^{2l-2t-5}$ 的系数，故

$$s_1=\sum_{t}(l-t-2)2^{l-t-2}\binom{t-1}{2l-2t-4}$$

与

$$s_2=\sum_{t}(n-l+3)2^{l-t-2}\binom{t-1}{2l-2t-4}$$

分别为

$$g_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{t}(t-1)x^{2t+1}(1+\sqrt{2}x)^{t-2}$$

与

$$g_2(x)=(n-l+3)\sum_{t}x^{2t}(1+\sqrt{2}x)^{t-1}$$

展开式中 x^{2l-4} 的系数，由定理 3 和展布在 $2l-3/3\leqslant t\leqslant \min(n,l-1)$ 上，当 $n\geqslant l-2$ 时，把和延拓到 $[1,+\infty)$，对我们这个计数问题没有影响，从而

$$g_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{t=1}^{\infty}(t-1)x^{2t+1}(1+\sqrt{2}x)^{t-1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x^5}{[1-x^2(1+\sqrt{2}x)]^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}x^5\left\{\frac{4}{25(1-\sqrt{2}x)^2}+\frac{4-3i}{50\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x\right]^2}+\frac{4+3i}{50\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x\right]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{32}{125(1-\sqrt{2}x)}+\frac{53-21i}{250\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)x\right]}+\frac{53+21i}{250\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x\right]}\right\}$$

其中，$i=\sqrt{-1}$，故

$$s_1=\frac{1}{125}\cdot 2^{l-2}(5l-16)-\frac{1}{125}\mathrm{R}_e\{i^{l-1}[(35l-103)+(5l-4)i]\}$$

其中，$\mathrm{R}_e\{\alpha\}$ 表示复数α的实部. 同理

$$s_2=\frac{n-l+3}{5}\{2^{l-2}+R_e[i^{l+1}(3-i)]\}$$

故

$$\sum_t(n-t+1)2^{l-t-2}\binom{t-1}{2l-2t-4}=s_1+s_2$$

$$=\frac{1}{125}\cdot 2^{l-2}(5l-16)-\frac{1}{125}R_e\{i^{l-1}[(35l-103)+(5l-4)i]\}$$

$$+\frac{(n-l+3)}{5}\{2^{l-2}+R_e[i^{l+1}(3-i)]\} \tag{8}$$

同理

$$\sum_t(n-t+1)2^{l-t}\binom{t}{2l-2t-2}$$

$$=\frac{1}{125}\cdot 2^{l+1}(5l-6)-\frac{2}{125}\mathrm{Re}\{i^{l+1}[(35l-33)+(5l+6)i]\}$$

$$+\frac{n-l+2}{5}\{2^{l+1}+2\mathrm{Re}[i^{l-2}(1+3i)]\} \tag{9}$$

由式(8)、式(9)及定理 3 得

定理 4　当 $n\geqslant l-2$ 时，

$$f_{2l}(2,n)=\frac{1}{125}2^{l-2}(225n-180l+411)$$

$$+\frac{1}{125}\mathrm{Re}\{i^l[(30l-25n-9)+(40l-75n-112)i]\}$$

参 考 文 献

〔1〕杨世州、张忠辅，平面格图圈的计数，兰州铁道学院学报，2（1986），1—10.

The Number of Cycles of Latticed Graph on Plane

Wang Zhixiong

Abstract

Let $f(m,n)$ and $f_{2l}(m,n)$ be the number of cycles and number of cycles with length $2l$, which are subgraphs of $m \times n$ Latticed graph on plane, respectively.

On this paper we have got recurrence formula of $f(3,n)$, closed formula of $f_{2l}(2,n)$ and we have estimated the order of recurrence formula of $f(m,n)$.