第7卷 第4期 华 侨 大 学 学 报 Vol. 7 No. 4
1986年11月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVRSITY Nov. 1986

关于电路上电流分布的唯一性的一个证明

黄 建 明*

（西北电讯工程学院）

摘 要

本文对电路理论中最基本的基尔霍夫定律的电路电流分布唯一性提出了一种证明途径，并且提供了一种对任意网络支路与节点间的关系进行分析的新方法.

一、引 言

基尔霍夫定律是电路理论中最基本的定律，它包括方程的函数形式和电流分布的唯一性(即对于一个确定的电路，电路中各支路的电流分布是唯一的，从而电压也是唯一确定的。)以前，对上述定律所含两个内容的证明，分别用电学理论及拓扑学进行论述。最近，有人开始用场论方法对二者加以统一证明[1]。本文在节点方程及单回路的基尔霍夫电压方程成立的前提下[2]，简明地论证了电路独立方程个数与电路电流未知数的数目相同，证明了电路的唯一性。其主要思路是：把任意网络看作一种特定网络中断开某些支路后所得到的网络。这个特定网络与任意网络的节点数相同、但前者在节点数一定时却具有最大数目的支路数。于是我们先论证在这个最多支路的特定网络里，电流分布是唯一的，然后在保持唯一性不变的情况下过渡到具有 n 个节点和 p 个支路的任意网络。

二、任意二个节点连成支路的特殊情况

考虑任意两个节点连成一条支路的网络。设 A_1、A_2、…、A_{q-1}、A_q 是这个网络的 q 个节点，则经过 A_1 计有 $(q-1)$ 条支路，因此有 $(q-1)$ 个电流未知数，但它们满足一个节点方程，所以实际只有 $(q-2)$ 个独立的电流未知数。另一方面，对于 q 个点集，固定 A_1 点，任取两点的集合数目为[3]

$$C^2_{q-1}=\frac{(q-1)(q-2)}{2}$$

这个数目也就是通过节点 A_1，以三个节点构成的三角形回路的回路方程数目。我们选择了这个形状的三角形回路，在于它是回路中边数为最少的单元回路，且所有未重叠的三角形回

本文1986年1月30日收到.

*系本校应用物理系85届毕业生.

路都是独立的。因为既然没有重叠，那么任一三角形回路中至少有一边(或支路)不曾出现在其它各三角形回路中。由此见到，通过节点 A_1 以任意三个节点构成的三角形回路方程独立数目为

$$N_{A_1}=\frac{(q-1)(q-2)}{2}$$

对于节点 A_2，情况类似，但有一个电流是重复的

$$I_{A_1\to A_2}=I_{A_2\to A_1}$$

所以电流未知数独立个数为$(q-3)$.通过 A_2 的三角形回路方程数也是 $C^2{}_{q-1}$，但以 A_1A_2 为一边的三角形回路计有$(q-2)$个，这些三角形都已出现在通过 A_1 的三角形回路独立方程里，不能再算为独立的。因此，通过 A_2 的三角形回路方程的独立数目为

$$N_{A_2}=\frac{(q-1)(q-2)}{2}-(q-2)$$

对于节点 A_3，独立电流未知数为$(q-4)$，三角形回路方程数为 $C^2{}_{q-1}$，其中有$[2(q-2)-1]$个是重复了前面的。因而，通过 A_3 的三角形回路方程的独立数目为

$$N_{A_3}=\frac{(q-1)(q-2)}{2}-2(q-2)+1$$

对于节点 A_{q-1}，电流未知数为1，且满足一个节点方程，所以没有增加电流独立未知数，而三角形回路方程数为 $C^2{}_{q-1}$，其中有$(q-1)(q-2)-(q-3)$个是重复前面的。因而，通过A_{q-1} 的三角形回路方程的独立数目为

$$N_{A_{q-1}}=\frac{(q-1)(q-2)}{2}-(q-2)(q-2)+(q-3)$$

对于最后一个节点 A_q，因为所有的电流未知数都已列入前面节点，所以没有增加独立电流未知数，而三角形回路数目为 $C^2{}_{q-1}$，其中有$(q-1)(q-2)-(q-2)$是重复前面的。因而，通过 A_q 的三角形回路方程的独立数目为

$$N_{A_p}=\frac{(q-1)(q-2)}{2}-(q-1)(q-2)+(q-2)$$

综上所述，对于节点数为 q 而在任意二个节点连成支路的这个特定网络，计有独立电流未知数为

$$\begin{aligned}N'&=(q-2)+(q-3)+(q-4)+\cdots+3+2+1\\&=\frac{(q-1)(q-2)}{2}\end{aligned}$$

另一方面，计有独立三角形回路的数目为

$$\begin{aligned}N&=N_{A_1}+N_{A_2}+\cdots+N_{A_{q-1}}+N_{A_q}\\&=q\left[\frac{(q-1)(q-2)}{2}\right]-[(q-2)+2(q-2)-1+\cdots+(q-2)(q-2)\\&\qquad-(q-3)+(q-1)(q-2)-(q-2)]\\&=\frac{(q-2)(q-1)}{2}\end{aligned}$$

可见，独立电流未知数与独立回路方程数目相等。因而，独立回路方程组有解且是唯一的[5]，从而网络中各支路的电流分布是唯一确定的。

三、对q个节点，p个支路任意网络的普遍情况

现在考虑从上述特定网络向任意网络的过渡，并证明在此过程中保持电流分布的唯一性。

设任意网络且有与特定网络相等的节点数 q。由于特定网络是节点数一定时支路数最多的网络，因而一般的任意网络可以认为是特定网络从其中一些节点断掉一些支路后而成的网络。因而，过渡分以下四步进行：

1. 设节点A_1与第 i 个节点A_i 断开，则独立电流未知数减少了一个 $I_{A_1\to A_i}$同时独立三角形回路方程也减少了$(q-2)$个。但是，以 A_1 和 A_i 的联线为对角线的，数目为$(q-3)$个的四边形或其异物同构体[4]却上升为独立回路方程。这是因为，如果以三角形为独立回路，则其它任意多边形或其异物同构体所构成的回路都可以由三角形回路用线性叠加的办法获得，因而不是独立回路。反之，如三角形回路已解体，则多边形或其异物同构体所构成的回路已经不存在由独立的三角形回路来组成的问题，因而成为独立回路。由此可见，实际上独立回路方程数减少个数为 $(q-2)-(q-3)=1$，刚好与独立电流未知数减的个数相同，保持电路电流分布的唯一性。

2. 设节点 A_1 相继地分别与 K_1 个节点断开 K_1 条支路，则独立电流未知数减少了 $\triangle N'=K_1$ 个，同时，独立三角形回路方程也减少了

$$\triangle N_1=(q-2)+(q-3)+\cdots+[q-(K_1+1)]$$

$$=\sum_{i=1}^{K_1}\left[q-(i+1)\right]$$

个，但增加了独立的四边形，五边形，…，(K_1+3)边形或其异物同构体的回路方程的数目为

$$\triangle N_2=(q-3)+(q-4)+\cdots+[q-(K_1+2)]$$

$$=\sum_{i=1}^{K_1}\left[q-(i+2)\right]$$

由此可见，实际上独立回路方程减少数是

$$\triangle N=\triangle N_1-\triangle N_2=K_1$$

与独立电流未知数减少的个数相同，保持电路电流分布的唯一性。

3. 设节点A_2相继地分别与K_2个节点断开 K_2 条支路，在 K_2 条支路里可以包含曾被 A_1 所断开的 A_1 与 A_2 间的支路，若这支路数用 K_2' 表示，则 K_2' 仅能取值 1 或 0。在这情况下，独立电流未知数减少了 $\triangle N'=K_2-K_2'$ 个，独立回路方程减少的数目也可以确定如下：

若暂不考虑节点 A_1 断开一些支路后对节点 A_2 的影响，那么，当节点 A_2 断开 K_2 条支路后，独立三角形回路方程减少的数目也是

$$(q-2)+(q-3)+\cdots+[q-(K_2+1)]$$

$$=\sum_{i=1}^{K_2}[q-(i+1)]$$

但现在减少的独立回路可能与节点A_1减少的独立回路数重复，因此应该减去可能的重复数。首先，节点A_2断开的K_2条支路可能包括在节点A_1处断开的K_2'条支路，因此应该减去

$$(q-2)+(q-3)+\cdots+[q-(K_2'+1)]=\sum_{i=1}^{K_2'}[q-(i+1)]$$

若$K_2'=0$，那么这一项就不存在了。其次，另一种可能，虽然$K_2'=0$，上式不存在，但因节点A_1与另一节点$A_i(i=1,2,\cdots,K_2)$断开后，使得三角形($\triangle A_1A_2A_i$)回路不复存在。设用符号$m_{2i}(i=1,2,\cdots,K_2)$表示当节点A_1与节点A_i断开后所减少的三角形回路的数目，而这些三角形都必须以A_2和A_i的联线为其一边。因此，考虑A_2断开K_2条支路后，减少的独立三角形回路数目应当减去$m_{2i}(i=1,2,\cdots,K_2)$。对所有K_2个节点都考虑过后，即有

$$\sum_{i-1}^{k_2}\{[q-(i+1)]-m_{2i}$$

因而，A_1点可能对A_2点的影响是使独立的三角形回路方程减少数目变为

$$\triangle N_1=\sum_{i-1}^{K_2}\{[q-(i+1)]-m_{2i}\}-\sum_{i-1}^{K_2'}[q-(i+1)]$$

同样，A_1点可能对A_2点的影响使增加的多边形或其异物同构体的回路方程的数目变为

$$\triangle N_2=\sum_{i-1}^{K_2}\{[q-(i+2)]-m_{2i}\}-\sum_{i-1}^{K_2'}[q-(i+2)]$$

可见，实际上独立回路方程减少数是

$$\triangle N=\triangle N_1-\triangle N_2=K_2-K_2'$$

与独立电流未知数减少的个数相同，保持电路电流分布的唯一性。

4. 设第j节点A_j分别与K_j个节点断开K_j条支路。若以K_j'表示为上述已断开的支路数，则有$K_j'=0,1,2,\cdots,\mu\leqslant j$。

如前如述，此时独立电流未知数减少了$\triangle N'=K_j-K_j'$个。由前面节点断开对A_j节点的影响，使独立的三角形回路方程减少的数目为

$$\triangle N_1=\sum_{i-1}^{K_j}\{[q-(i+1)]-m_{ji}\}-\sum_{i-1}^{K_j'}[q-(i+1)]$$

当$K_j'=0$时，右边第二项为零，而且$m_{ji}\leqslant\sum_{l=1}^{j-1}K_l$。并且也使增加的多边形或其异物同构体的回路方程的数目为

$$\triangle N_2=\sum_{i-1}^{K_j}\{[q-(i+2)]-m_{ji}\}-\sum_{i-1}^{K_j'}[q-(i+2)]$$

因而，实际上独立回路方程减少数是

$$\triangle N=\triangle N_1-\triangle N_2=K_j-K_j'$$

与独立电流未知数减少的个数相同，保持电路电流分布的唯一性。

四、结　　语

对相等节点数的诸网络讲，其中有一个支路数为最多的网络，称为特定网络。这个特定网络具有三角形回路的特征，而且凡不重叠的三角形都具有独立回路的性质。由此特征，很容易地证明了这个特定网络内的电流分布的唯一性。然后从这个前提出发，又证明了不论从其中一至几个节点断开一条或几条支路，都不至破坏电流分布的唯一性，而我们通常称为具有 q 个节点，p 个支路的任意网络，显然可以由具有 q 个节点的特定网络从某些节点断开一定支路后得到。因而，对具有 q 个节点，p 个支路的任意网络的电流分布唯一性定理得到证明。

本文承华侨大学物理系陈新年老师的指导，特致深切的谢意。

参　考　文　献

〔1〕陈新年，用场论方法证明基尔霍夫定律独立方程的数目，华侨大学学报，6，1（1985）。
〔2〕李瀚荪，电路分析基础（上册），高等教育出版社，（1983）。
〔3〕同济大学数学教研室主编，概率论，人民教育出版社，（1983）。
〔4〕宗孔德译，基尔霍夫定律，人民教育出版社，（1981）。

A New Method for Proving the Uniqueness of Electric Current Distribution in Electric Circuit

Huang Jianming

Abstract

This paper introduces a new method for proving the uniqueness of electric current distribution in electric circuit, which is a part of Kirchhoff's law. It provides also a new method for analysing the relation between the lines and joints in an arbitrary network.