

关于有限幂零群共轭类数的一个注记

肖 长 城*

(广西民族学院)

本注记的目的是纠正 Sherman 在文献[1]中的第二个定理, 该定理说:

“设 G 是阶为 $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ 的 n 类幂零群, 则

$$K(G) \geq \prod_{i=1}^s (t_i(p_i^{r_i/t_i}) - t_i + 1) \geq n|G|^{1/n} - n + 1 > \log_2 |G|$$

其中诸 p_i 是互异素数, 且 $t_i = \max\{1, r_i - 1\}$.

该定理中的第二节不等式

$$\prod_{i=1}^s (t_i(p_i^{r_i/t_i}) - t_i + 1) \geq n|G|^{1/n} - n + 1 \quad (1)$$

是错误的.

例如当 G 是阶为 2^3 的四元数群与阶为 3^5 的交换群的直积时, 则 $|G| = p_1^{r_1} p_2^{r_2} = 2^3 3^5$, 且 $t_1 = 2, t_2 = 4, n = 2$. 于是

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^2 (t_i(p_i^{r_i/t_i}) - t_i + 1) \\ &= (2(2^{3/2}) - 2 + 1)(4(3^{5/4}) - 4 + 1) \\ &= 48\sqrt[4]{12} - 12\sqrt[4]{3} - 12\sqrt{2} + 3 \\ &< 48 \times 1.9 - 12 \times 1.3 - 12 \times 1.4 + 3 \\ &= 61.8 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} n|G|^{1/n} - n + 1 &= 2(2^3 \cdot 3^5)^{1/2} - 2 + 1 \\ &= 36\sqrt{6} - 1 \\ &> 36 \times 2.4 - 1 \\ &= 85.4 \end{aligned}$$

本文1985年7月20日收到.

*作者系本校数学系62级毕业生, 现为广西民族学院数学系讲师.

推得

$$\prod_{i=1}^s (t_i(p_i^{r_i/n_i}) - t_i + 1) < n|G|^{1/n} - n + 1$$

因而不等式(1)不成立。

下面纠正该定理, 只要用 G 的 p_i -Sylow 子群的幂零类 n_i 代替 $t_i = \max\{1, r_i - 1\}$, 即

定理 设 G 是阶为 $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$ 的 n 类幂零群, 则

$$K(G) \geq \prod_{i=1}^s (n_i(p_i^{r_i/n_i}) - n_i + 1) \geq n|G|^{1/n} - n + 1 \\ > \log_2 |G|,$$

其中诸 p_i 是互异素数, 且 n_i 是 G 的 p_i -Sylow 子群的幂零类。

证 只要证明不等式

$$\prod_{i=1}^s (n_i(p_i^{r_i/n_i}) - n_i + 1) \geq n|G|^{1/n} - n + 1 \quad (2)$$

其中 n 是诸 n_i 中之最大者, 这是因为幂零群的幂零类是它的诸 p -Sylow 子群的幂零类中之最大者。

首先, $S=1$ 时式(2)显然成立。今设 $S=k-1$ 时式(2)成立, 则

$$\prod_{i=1}^k (n_i(p_i^{r_i/n_i}) - n_i + 1) \\ = \left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i(p_i^{r_i/n_i}) - n_i + 1) \right] (n_k(p_k^{r_k/n_k}) - n_k + 1) \\ \geq (n'(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n'} - n' + 1) (n_k(p_k^{r_k/n_k}) - n_k + 1) \quad (3)$$

其中 $n' = \max\{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}\}$ 。令 $n = \max\{n', n_k\} = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ 并注意到 $n|G|^{1/n} - n + 1$ 是 n 的递减函数, 我们有

$$(n'(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n'} - n' + 1) (n_k(p_k^{r_k/n_k}) - n_k + 1) \\ \geq (n(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n} - n + 1) (n(p_k^{r_k/n_k}) - n + 1) \\ = n(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k})^{1/n} + n(n-1)(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k})^{1/n} \\ - n(n-1)((p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n} + (p_k^{r_k/n_k})^{1/n}) + n(n-1) - n + 1 \quad (4)$$

由于 $p_i \geq 2$, 故 $(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n}$ 与 $(p_k^{r_k/n_k})^{1/n}$ 都大于 1, 可令

$$(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n} = 1 + \alpha, \quad \alpha > 0,$$

则

$$(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n} (p_k^{r_k/n_k})^{1/n} + 1 \\ = (1 + \alpha)(p_k^{r_k/n_k})^{1/n} + 1 \\ = (p_k^{r_k/n_k})^{1/n} + \alpha(p_k^{r_k/n_k})^{1/n} + 1 \\ > (p_k^{r_k/n_k})^{1/n} + \alpha + 1 \\ = (p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n} + (p_k^{r_k/n_k})^{1/n}$$

于是

$$\begin{aligned}
 & n(n-1)(p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k})^{1/n} - n(n-1)((p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n} \\
 & \qquad \qquad \qquad + (p_k^{r_k})^{1/n}) + n(n-1) \\
 & = n(n-1)[((p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n}(p_k^{r_k})^{1/n} + 1) \\
 & \qquad \qquad \qquad - ((p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n} + (p_k^{r_k})^{1/n})] \\
 & \geq 0
 \end{aligned}$$

再由式(3)与式(4)得

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^k (n_i(p_i^{r_i})^{1/n} - n_i + 1) & \geq (n'((p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_{k-1}^{r_{k-1}})^{1/n'} - n' + 1)(n_k(p_k^{r_k})^{1/n} - n_k + 1) \\
 & \geq n(p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k})^{1/n} - n + 1
 \end{aligned}$$

即 $S=k$ 时式(2)也成立。因此 S 为任意自然数时式(2)都成立。

参 考 文 献

[1] Gary Sherman, A lower bound for the number of conjugacy classes in a finite nilpotent group, Pacific J. Math, 80 (1979), 253—254.

A Note on the Number of Conjugacy Classes in a Finite Nilpotent Group

Xiao Changcheng

Abstract

This note gives some Correction to the theorem from Sherman's paper on a lower bound for the number of conjugacy classes in a finite nilpotent group which was carried in Pacific J. Math.