第7卷 第4期
1986年11月

华 侨 大 学 学 报
JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY

Vol.7 No.4
Nov. 1986

关于解大线性系统的推广的双参数松弛法的收敛性

曾 文 平

(应用数学系)

摘 要

本文应用 Evans[1] 的预处理技巧，定义了某些解大线性系统 $AX=b$ 的推广的双参数松弛法(简称为ETOR 方法)．Jacobi、Gauss-Seidel、SOR、SSOR、AOR和TOR[2] 迭代法均可作为其特例．然后，当系数矩阵具有特殊性质，例如Hermite 正定，H-及 L-矩阵、不可约弱对角占优…等，对所考虑的迭代法，建立了某些收敛定理．

一、引 言

考虑解N阶线性方程组

$$AX=b \tag{1}$$

的松弛迭代法中，SOR 迭代和 AOR[3] 迭代都是把整个上三角部分或下三角部分乘以某个松弛因子。但在很多应用数学中出现的大线性系统中，其系数矩阵往往为带形或分块带形稀疏矩阵，在各条斜线位置上的元素在数量上往往有很大差异，因而在不同斜线位置上的元素乘以不同松弛因子是比较合理的。基于这种想法，匡蛟勋于1983年提出解大线性系统的双线性松弛法(TOR方法)。[2]

本文利用 EVans[1] 的预处理技巧，定义了某些推广的双参数松弛法(简称为ETOR方法)，Jacobi、Gausss-Seidel、SOR、AOR、TOR 和SSOR迭代法均可作为其特例。然后，在系数矩阵具有某些特殊性质，例如Hermite 正定，H－矩阵，L－矩阵，不可约弱对角占优…等，对所考虑的 ETOR 迭代法建立了某些收敛性定理，並给出使用方便的收敛性判别准则。

本文1985年12月6日收到.

二、ETOR迭代法的构造

设线性方程组(1)的系数矩阵

$$A=D-E-E'-F-F' \tag{2}$$

其中$-E$，$-F$为A的严格下三角部分的某些元素组成，$-E'$，$-F'$为A的严格上三角部分的某些元素组成，D由A的对角或对角块元素组成，並设D是非奇异的。

若式(1)左乘以非奇异矩阵R^{-1}，则式(1)成为

$$R^{-1}AX=R^{-1}b \tag{3}$$

其中R是相对地易于求逆的矩阵。例如，可取

$$R=(D-\alpha_1E-\beta_1F)D^{-1}(D-\alpha_2E'-\beta_2F') \tag{4}$$

其中α_1，β_1，α_2，β_2为实参数。定义迭代格式

$$X^{(n+1)}=X^{(n)}+\tau R^{-1}(b-AX^{(n)}) \tag{5}$$

其中$\tau\neq0$为实参数。显然，式(5)与式(3)是完全相容的。于是，我们有

$$X^{(n+1)}=L_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\tau}X^{(n)}+G \tag{6}$$

其中 $L_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\tau}$

$$\begin{aligned}&=I-\tau[(D-\alpha_1E-\beta_1F)D^{-1}(D-\alpha_2E'-\beta_2F')]^{-1}(D-E-F-E'-F')\\&=(I-\alpha_2U'-\beta_2V')^{-1}(I-\alpha_1U-\beta_1V)^{-1}\\&\{(I-\alpha_1U-\beta_1V)(I-\alpha_2U'-\beta_2V')-\tau(I-U-V-U'-V')\}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}G&=\{(D-\alpha_1E-\beta_1F)D^{-1}(D-\alpha_2E'-\beta_2F')\}^{-1}\tau b\\&=(I-\alpha_2U'-\beta_2V')^{-1}(I-\alpha_1U-\beta_1V)^{-1}D^{-1}\tau b\end{aligned} \tag{8}$$

其中$U=D^{-1}E$，$V=D^{-1}F$，$U'=D^{-1}E'$，$V'=D^{-1}F'$

明显地，当参数α_1，α_2，β_1，β_2及τ选取不同值时，便可得到不同的迭代格式，列表如表1所示(其中记$L=U+V$，$K=U'+V'$，$C_L=E+F$，$C_k=E'+F'$)。

在式)6)、式(7)及式(8)中，若令$\alpha_1=\alpha$，$\beta_1=\beta$，$\alpha_2=\beta_2=0$，则

$$R=D-\alpha E-\beta F \tag{9}$$

而迭代格式式(6)为

$$X^{(n+1)}=L_{\alpha,\beta,\tau}X^{(n)}+G \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}L_{\alpha,\beta,\tau}&=(D-\alpha E-\beta F)^{-1}\{(1-\tau)D+(\tau-\alpha)E+(\tau-\beta)F+\tau E'+\tau F'\}\\&=(I-\alpha U-\beta V)^{-1}\{(1-\tau)I+(\tau-\alpha)U+(\tau-\beta)V+\tau U'+\tau V'\}\end{aligned} \tag{11}$$

$$G=(D-\alpha E-\beta F)^{-1}\tau b=\tau(I-\alpha U-\beta V)^{-1}D^{-1}b \tag{12}$$

因为当$\alpha_1=\frac{\alpha}{2}$，$\beta_1=\frac{\beta}{2}$，$\tau=\frac{\alpha+\beta}{2}$时它退化为匡蛟勋于1983年提出的TOR方法，故称之为推广的TOR方法，简记为ETOR方法。下面我们将讨论在各种特殊矩阵的情况下，ETOR方法的收敛性。

表 1

α_1	β_1	α_2	β_2	τ	R	迭代格式
0	0	0	0	1	D	Jacobi 迭代 $D^{-1}(C_L+C_K)=L+K$
1	1	0	0	1	$D-C_L$	Gauss-Seidel 迭代 $(D-C_L)^{-1}C_K$
w	w	0	0	w	$D(I-wL)$	SOR 迭代 $(I-wL)^{-1}\{(1-w)I+wK\}$
w	w	0	0	r	$D(I-wL)$	AOR (ESOR) 迭代 $(I-wL)^{-1}\{(1-r)I+(r-w)L+rK\}$
w	w	w	w	$w(2-w)$	$(D-wC_L)D^{-1}(D-wC_K)$	SSOR 迭代 $I-w(2-w)[(I-wL)(L-wK)]^{-1}\cdot(I-L-K)$
α	β	0	0	τ	$D-\alpha E-\beta F$	ETOR 迭代 $(D-\alpha E-\beta F)^{-1}\cdot\{(1-\tau)D+(\tau-\alpha)E+(\tau-\beta)F+\tau E'+\tau F'\}$ $(\tau\neq 0)$
$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\beta}{2}$	0	0	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$D-\frac{\alpha}{2}E-\frac{\beta}{2}F$	TOR 迭代 $(2D-\alpha E-\beta F)^{-1}\{(2-\alpha-\beta)D+(\alpha+\beta)(E'+F')+\alpha F+\beta E\}$
α	β	0	0	α	$D-\alpha E-\beta F$	$(D-\alpha E-\beta F)^{-1}\{(1-\alpha)D+(\alpha-\beta)F+\alpha(E'+F')\}$
α	β	0	0	β	$D-\alpha E-\beta F$	$(D-\alpha E-\beta F)^{-1}\{(1-\beta)D+(\beta-\alpha)E+\beta(E'+F')\}$

三、Hermite 正定矩阵

考虑到将 ETOR 方法应用到有限元问题，考虑更一般的情形：

(i) A 和 D 是 Hermite 正定矩阵

(ii) S_1，S_2 是斜 Hermite 矩阵，即 （13）

$$S_1^*=-S_1,\quad S_2^*=-S_2$$

定义

$$E=\frac{1}{4}(D-A+S_1)$$
$$F=\frac{1}{4}(D-A+S_2) \tag{14}$$

则

$$A=D-(E+F)-(E^*+F^*)$$

通常，由式(14)所定义的 E，F 不一定是严格下三角矩阵。实际应用时，也可选取 S_1,S_2，使 E，F 为严格下三角矩阵。

在式(13)的假设下，当 $0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 4$ 时，$D-\alpha E-\beta F$ 是非奇异的。事实上，因对 $\forall v\in C^n$，有

$$Re(S_1t,\ t)=Re(S_2t,\ t)=0$$

而

$$D-\alpha E-\beta F=D-\frac{\alpha}{4}(D-A+S_1)-\frac{\beta}{4}(D-A+S_2)$$

$$=\frac{1}{4}\{(4-\alpha-\beta)D+(\alpha+\beta)A-(\alpha S_1+\beta S_2)\} \tag{15}$$

因 D，A 为 Hermite 正定，故对 $\forall t\in C^n$，$t\neq 0$ 均有

$$\mathrm{Re}((D-\alpha E-\beta F)t,\ t)>0 \tag{16}$$

所以，当$0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 4$ 时，$(D-\alpha E-\beta F)^{-1}$ 存在，$L_{\alpha,\beta,\tau}$ 迭代是确定的。

将式(4)代入迭代矩阵 $L_{\alpha,\beta,\tau}$ 得

$$L_{\alpha,\beta,\tau}=\{(4-\alpha-\beta)D+(\alpha+\beta)A-(\alpha S_1+\beta S_2)\}^{-1}\cdot$$

$$\{(4-\alpha-\beta)D+(\alpha+\beta-4\tau)A-(\alpha S_1+\beta S_2)\} \tag{17}$$

设λ是 $L_{\alpha,\beta,\tau}$ 的任一特征值，$t\neq 0$ 为其相应的特征向量，即 $L_{\alpha,\beta,\tau}t=\lambda t$。

若记 $\langle Dt,\ t\rangle=f>0$，$\langle At,\ t\rangle=g>0$，

$\langle S_1t,\ t\rangle=ih_1$，$\langle S_2t,\ t\rangle=ih_2$，

则有

$$|\lambda|^2=\left|\frac{(4-\alpha-\beta)f+(\alpha+\beta-4\tau)g-(\alpha h_1+\beta h_2)i}{(4-\alpha-\beta)f+(\alpha+\beta)g-(\alpha h_1+\beta h_2)i}\right|^2$$

$$=1-8\tau g\times\frac{(4-\alpha-\beta)f+(\alpha+\beta-2\tau)g}{[(4-\alpha-\beta)f+(\alpha+\beta)g]^2+(\alpha h_1+\beta h_2)^2} \tag{18}$$

故当 $0<2\tau\leqslant\alpha+\beta<4$ 或 $0<2\tau<\alpha+\beta\leqslant 4$ 时，对所有λ均有$|\lambda|<1$，即迭代矩阵 $L_{\alpha,\beta,\tau}$的谱半径 $\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$，即 ETOR 方法收敛。于是我们证明了如下的定理。

定理 1

在式(13)的假定下，当 $0<2\tau\leqslant\alpha+\beta<4$ 或 $0<2\tau<\alpha+\beta\leqslant 4$ 时，ETOR 方法收敛。

本定理将文[7]中关于 AOR 方法的定理 1 推广到 ETOR 方法，从而扩充了文[2] 中的定理 2。

四、H-矩　阵

设$A\in C^{n,n}$是非奇异复矩阵，定义其比较矩阵 $m(A)=(m_{ij})\in R^{n,n}$ 为

$$m_{ii}=|a_{ii}|,\ m_{ij}=-|a_{ij}|(i\neq j,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n)$$

且定义

$\Omega(A)=\{B=(b_{ij})\in C^{n,n}:\ |b_{ij}|=|a_{ij}|;\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n\}$ 为与A相伴的等模矩阵集。注意，A、$m(A)\in\Omega(A)$。

又令$C_{*}^{n,n}$表示在$C^{n,n}$中所有对角元不为 0 的矩阵的子集，即

$$C_{*}^{n,n}=\{A\in C^{n,n}:\ a_{ii}\neq 0,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

对任意 $A=(a_{ij})\in C_{*}^{n,n}$ 可以分解 $B=(b_{ij})\in\Omega(A)$ 成为

$$B=D(B)-E(B)-F(B)-E'(B)-F'(B)$$

其中 $D(B)$，$E(B)$，$F(B)$和 $E'(B)$，$F'(B)$分别为 B 的对角矩阵，严格下三角矩阵和严格上三

角矩阵的一部分。

定义

$$J(B)=(D(B))^{-1}\{E(B)+F(B)+E'(B)+F'(B)\}\ (B\in\Omega(A))$$

为 B 的相伴Jacobi 矩阵。

设 $B=(b_{ij})\in R^{n,n}$，$b_{ij}\leqslant 0\ (i\neq j;\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n)$

令 $C=\tau I-B$

其中 $\tau=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{b_{ii}\}$。显然，$C=(C_{ij})$是非负矩阵，且满足

$$C_{ii}=\tau-b_{ii}\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant n);\quad C_{ij}=-b_{ij}\geqslant 0\ (1\leqslant i,\ j\leqslant n,\ i\neq j).$$

众所周知，当$\tau>\rho(C)$时，称B是非奇异$M-$矩阵，其中$\rho(C)$是矩阵C 的谱半径；且当 $m(A)$是非奇异 $M-$矩阵时，称 $A\in C^{n,n}$是非奇异的 $H-$ 矩阵。

最后，如果 $B=(b_{ij})\in C^{n,n}$，则 $|B|=(|b_{ij}|)\in R^{n,n}$。

利用 Varga[4] 关于矩阵正规分裂的思想，有定理 2。

定理 2

设$A=(a_{ij})\in C_{*}^{n,n}(n\geqslant 2)$，则下列三个命题等价：

(1)A 是非奇异的 $H-$矩阵；

(2)对于任意 $B\in\Omega(A)$，$\rho(J(B))\leqslant\rho(|J(B)|)=\rho(J(m(A)))<1$；

(3)对于任意 $B\in\Omega(A)$，则 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，且 $0<\max(\alpha,\beta)\leqslant\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|J(B)|)}$ 时有

$$\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})\leqslant|1-\tau|+\tau\rho(|J(B)|)<1.$$

证

(1)$\Longleftrightarrow$(2)的证明可见文[5]，从略。只证(1)$\Longleftrightarrow$(3)。先证(1)$\Longrightarrow$(3)：

由式(11)知

$$L_{\alpha,\beta,\tau}=(I-\alpha U-\beta V)^{-1}\{(1-\tau)I+(\tau-\alpha)U+(\tau-\beta)V+\tau U'+\tau V'\}$$

並记

$$W_{\alpha,\beta,\tau}=(I-\alpha|U|-\beta|V|)^{-1}\{|1-\tau|I+(\tau-\alpha)|U|+(\tau-\beta)|V|+\tau|U'|+\tau|V'|\}$$

显然，当$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，且$0<\max(\alpha,\ \beta)\leqslant\tau$时，有

$$|(I-\alpha U-\beta V)^{-1}|\leqslant(I-\alpha|U|-\beta|V|)^{-1}$$

及

$$|L_{\alpha,\beta,\tau}|\leqslant\check{L}_{\alpha,\beta,\tau}$$

作矩阵

$$\bar{A}_{\alpha,\beta,\tau}=\frac{1-|1-\tau|}{\tau}I-|J(B)|$$

的分裂

$$\bar{A}_{\alpha,\beta,\tau}=\bar{M}_{\alpha,\beta,\tau}-\bar{N}_{\alpha,\beta,\tau}$$

其中

$$\bar{M}_{\alpha,\beta,\tau}=\frac{1}{\tau}(I-\alpha|U|-\beta|V|)$$

$$\bar{N}_{\alpha,\beta,\tau}=\frac{1}{\tau}\{|1-\tau|I+(\tau-\alpha)|U|+(\tau-\beta)|V|+\tau|U'|+\tau|V'|\}$$

则对 $0\leqslant\alpha,\ \beta<\tau$ 有

$$\bar{L}_{\alpha,\beta,\tau}=\bar{M}^{-1}_{\alpha,\beta,\tau}\bar{N}_{\alpha,\beta,\tau}$$

且 $\bar{M}^{-1}_{\alpha,\beta,\tau}\geqslant 0$，$\bar{N}_{\alpha,\beta,\tau}\geqslant 0$，则 $A_{\alpha,\beta,\tau}$ 有正规分裂

$$\bar{A}_{\alpha,\beta,\tau}=\bar{M}_{\alpha,\beta,\tau}-\bar{N}_{\alpha,\beta,\tau}$$

$$=\frac{1-|1-\tau|}{\tau}\left(I-\frac{\tau}{1-|1-\tau|}|J(B)|\right)$$

当 $0<\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|J(B)|)}$ 时，$\bar{A}^{-1}_{\alpha,\beta,\tau}\geqslant 0$，此时 $\rho(\bar{L}_{\alpha,\beta,\tau})<1$。

因此

$$\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})\leqslant\rho(\bar{L}_{\alpha,\beta,\tau})<1\ \left(0\leqslant\alpha,\ \beta<\tau<\frac{2}{1+\rho(|J(B)|)}\right)$$

又作 $\bar{A}_{\alpha,\beta,\tau}$ 的分裂

$$\bar{A}_{\alpha,\beta,\tau}=M_{\alpha,\beta,\tau}-N_{\alpha,\beta,\tau}$$

其中

$$M_{\alpha,\beta,\tau}=\frac{1}{\tau}I$$

$$N_{\alpha,\beta,\tau}=\frac{1}{\tau}\{|1-\tau|I+\tau|J(B)|\}\ (\tau>0)$$

且 $N_{\alpha,\beta,\tau}\geqslant\bar{N}_{\alpha,\beta,\tau}$，所以由文[4]知

$$\rho(\bar{L}_{\alpha,\beta,\tau})=\rho(\bar{M}^{-1}_{\alpha,\beta,\tau}\bar{N}_{\alpha,\beta,\tau})\leqslant\rho(M^{-1}_{\alpha,\beta,\tau}N_{\alpha,\beta,\tau})$$
$$=\rho(|1-\tau|I+\tau|J(B)|)=|1-\tau|+\tau\rho(|J(B)|)$$

综上所述，当 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$0\leqslant\alpha,\ \beta<\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|J(B)|)}$ 时，$\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})\leqslant|1-\tau|+$ $+\tau\rho(|J(B)|)<1$。

次证(3)$\Longrightarrow$(1)：

因 $m(A)\in\Omega(A)$，所以，$\rho(J(m(A)))=\rho(|J(m(A))|)$。任选 $0<\tau<1$，使 $0<\max(\alpha,\beta)<\tau<\dfrac{2}{1+\rho(J(m(A)))}$，则从 $|1-\tau|+\tau\rho(J(m(A)))<1$ 推出 $\tau(\rho(J(m(A)))-1)<0$。因 $\tau>0$，必有 $\rho(J(m(A)))<1$，故 $m(A)$ 是非奇异的 $M-$矩阵，于是 A 是非奇异的 $H-$矩阵。

从定理 2 得：

推论1 设 A 是严格对角占优和不可约对角占优，则对任意 $B\in\Omega(A)$ 和 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$0<\max(\alpha,\ \beta)\leqslant\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|J(B)|)}$ 时，ETOR 方法收敛。

推论2 设 A 是 $M-$矩阵，则对一切 $B\in\Omega(A)$ 和 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$0<\max(\alpha,\beta)\leqslant\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|J(B)|)}$，ETOR方法收敛。

这里将文[7]中定理 2 系 1、系 2 推广到 EOTR 方法中。

五、L-矩　　阵

定理3 如果$A=D-E-F-E'-F'$为L-矩阵，令$\lambda_{\alpha,\beta,\tau}=\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})$，则当$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$0<\max(\alpha,\beta)<\tau<1$时有

$$\frac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}+\tau-1}{\tau}=\rho\left\{\left(\frac{\tau-\alpha}{\tau}+\frac{\alpha}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\right)U+\left(\frac{\tau-\beta}{\tau}+\frac{\beta}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\right)V+(U'+V')\right\} \quad (19)$$

证 由$L_{\alpha,\beta,\tau}$的表达式(11)知，当$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$0<\max(\alpha,\beta)<\tau<1$时$L_{\alpha,\beta,\tau}\geqslant 0$。由非负矩阵理论知$\lambda_{\alpha,\beta,\tau}=\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})$是$L_{\alpha,\beta,\tau}$的一个特征值，从而存在一非0向量$X\geqslant 0$使

$$(\lambda_{\alpha,\beta,\tau}-1+\tau)X=\{(\tau-\alpha)U+(\tau-\beta)V+\tau(U'+V')+\alpha\lambda_{\alpha,\beta,\tau}U+\beta\lambda_{\alpha,\beta,\tau}V\}X \quad (20)$$

从而$\dfrac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}-1+\tau}{\tau}\geqslant 0$为非负矩阵

$$\left(\frac{\tau-\alpha}{\tau}+\frac{\alpha}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\right)U+\left(\frac{\tau-\beta}{\tau}+\frac{\beta}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\right)V+(U'+V')$$

的一个特征值，于是得

$$\frac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}-1+\tau}{\tau}\leqslant\rho\left[\left(\frac{\tau-\alpha}{\tau}+\frac{\alpha}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\right)U+\left(\frac{\tau-\beta}{\tau}+\frac{\beta}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\right)V+(U'+V')\right]\overset{\text{记}}{=}\mu \quad (21)$$

并存在非0向量$Y\geqslant 0$，使得

$$\left[\left(\frac{\tau-\alpha}{\tau}+\frac{\alpha}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\right)U+\left(\frac{\tau-\beta}{\tau}+\frac{\beta}{\tau}\lambda_{\alpha,\beta,\tau}\right)V+(U'+V')\right]Y=\mu Y \quad (22)$$

即

$$\begin{aligned}&\{(\tau-\alpha)U+(\tau-\beta)V+\tau(U'+V')+(1-\tau)I\}Y\\&=\{(\mu\tau-\tau+1)I-\lambda_{\alpha,\beta,\tau}(\alpha U+\beta V)\}Y\end{aligned} \quad (23)$$

(i) 若$\mu\tau-\tau+1>0$，则有

$$\begin{aligned}&\left\{I-\frac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}}{\mu\tau-\tau+1}(\alpha U+\beta V)\right\}^{-1}\{(\tau-\alpha)U+(\tau-\beta)V+\tau(U'+V')+(1-\tau)I\}Y\\&=(\mu\tau-\tau+1)Y\end{aligned} \quad (24)$$

记上式左端矩阵为G，则$\mu\tau-\tau+1$为G的特征值，从而有$\mu\tau-\tau+1\leqslant\rho(G)$。而由式(21)可证$G\leqslant L_{\alpha,\beta,\tau}$ 且$\mu\tau-\tau+1\leqslant\rho(G)\leqslant\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})=\lambda_{\alpha,\beta,\tau}$。从而$\mu\leqslant\dfrac{\lambda_{\alpha,\beta,\tau}+\tau-1}{\tau}$，与式(21)联立便得式(19)。

(ii) 若$\tau\mu-\tau+1=0$，则有$\tau\mu=0$，$1-\tau=0$，从而得$\mu=0$，$\tau=1$。且由式(21)知式(19)成立，且$\lambda_{\alpha,\beta,\tau}=0$。

(iii) $\tau\mu-\tau+1<0$，由式(23)利用反证法易知这是不可能的。定理证毕。

利用反证法，由定理3可推出如下推论：

推论1 如果$A=D-E-F-E'-F'$是L—矩阵，且$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$0<\max(\alpha,\beta)<\tau<1$时，若记$B=U+V+U'+V'$，则有

(i)$\rho(B)=0 \Leftrightarrow \rho(L_\tau)=1-\tau \Leftrightarrow \rho(L_{\alpha,\beta,\tau})=1-\tau$

(ii)$\rho(B)=1 \Leftrightarrow \rho(L_\tau)=1 \Leftrightarrow \rho(L_{\alpha,\beta,\tau})=1$

(iii) $0<\rho(B)<1 \Leftrightarrow 1-\tau<\rho(L_\tau)<1 \Leftrightarrow 1-\tau<\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$

且有估计式

$\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})\leqslant 1-\tau(1-\rho(B))$.

(iv)$\rho(B)>1 \Leftrightarrow \rho(L_\tau)>1 \Leftrightarrow \rho(L_{\alpha,\beta,\tau})>1$.

且有估计式

$\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})\geqslant 1-\tau+\tau\rho(B)$. $(0<\tau<1)$.

其中SOR迭代矩阵为

$L_\tau=(I-\tau(U+V))^{-1}\{(1-\tau)I+\tau(U'+V')\}$

证明类似于文[6]，从略。

这个推论表明：当$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$0<\max(\alpha,\beta)<\tau<1$时，对$L$-矩阵而言，Jacobi迭代，SOR迭代$(0<\omega=\tau<1)$与ETOR迭代同时敛散，它包含了文[2]中定理4和定理5的结果。

六、收敛性的三个判别准则

根据如下几个引理，易于导出我们的收敛性判别准则。

引理 1[8] 如果矩阵A严格对角占优或不可约弱对角占优，则A具有非0主对角元，且$\det A\neq 0$。

引理 2[9] 如果$A=(a_{ij})_{n\times n}$的主对角元全不为0，

且 $\sum_{i,\ j=1 \atop i\neq j}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2\leqslant 1$，则$\det A\neq 0$。

定理 4 若线性方程组式(1)的系数矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足下列三条件之一：

(i)系数矩阵A严格对角占优，即

$$\sum_{j=1 \atop j\neq i}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1 \tag{25}$$

(ii)系数矩阵A不可约且弱对角占优，即

$$\sum_{j=1 \atop j\neq i}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\leqslant 1 \tag{26}$$

且至少其中一个不等式严格成立。

(iii)系数矩阵A的主对角元aii全不为0 $(i=1, 2, \cdots, n)$，且满足条件

$$\sum_{i,\ j=1 \atop i\neq j}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2\leqslant 1 \tag{27}$$

则当$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$0\leqslant\beta\leqslant 1$，$0<\tau\leqslant 1$时，ETOR方法收敛。

证 设$L_{\alpha,\beta,\tau}$的某些特征值$|\lambda|\geqslant 1$，则有

$$\det(L_{\alpha,\beta,\tau}-\lambda I)=0 \tag{28}$$

由$L_{\alpha,\beta,\tau}$的表达式(11)知，当$0<\tau\leqslant 1$时，因设$|\lambda|\geqslant 1$，故$1-\tau-\lambda\neq 0$，经适当变换后可得式(28)的等价形式

$$\det Q=0 \tag{29}$$

其中

$$Q=I-\frac{1}{\lambda+\tau-1}\{(\tau-\alpha+\lambda\alpha)U+(\tau-\beta+\lambda\beta)V+\tau(U'+V')\} \tag{30}$$

上式右端U，V，U'，V'项的系数按模小于等于1的充要条件为

$$(1)|\lambda-1+\tau|\geqslant|\tau-\alpha+\lambda\alpha| \tag{31}$$

$$(2)|\lambda-1+\tau|\geqslant|\tau-\beta+\lambda\beta| \tag{32}$$

$$(3)|\lambda-1+\tau|\geqslant\tau \tag{33}$$

令$\lambda^{-1}=pe^{i\theta}$，$p$和$\theta$是实的，且$0<p\leqslant 1$，$i=\sqrt{-1}$，则式(33)等价于

$$1+p^2-2p(1-\tau)\cos\theta-2p^2\tau\geqslant 0 \tag{34}$$

当$0<\tau\leqslant 1$时，上式只要$\cos\theta=1$时成立即可。事实上，这时式(34)成为

$$1+p^2-2p(1-\tau)-2p^2\tau=(1-p)[(1-p)+2p\tau]\geqslant 0 \tag{35}$$

对一切$0<p\leqslant 1$成立。

又式(31)等价于

$$(1-\alpha)[1+\alpha-2p\cos\theta(1+\alpha-\tau)+p^2(1+\alpha-2\tau)]\geqslant 0 \tag{36}$$

当$0<\tau\leqslant 1$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$时，上式只要$\cos\theta=1$时成立即可，而这时式(36)成为

$$1+\alpha-2p(1+\alpha-\tau)+p^2(1+\alpha-2\tau)=(1-p)[(1-p)(1+\alpha)+2p\tau]\geqslant 0 \tag{37}$$

对一切$0<p\leqslant 1$成立。

同理，当$0<\tau\leqslant 1$，$0\leqslant\beta\leqslant 1$时，式(32)成立。

综上所述，当$0<\tau\leqslant 1$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$0\leqslant\beta\leqslant 1$时式(31)—(33)均成立。由此不难证明：当矩阵A满足定理4的三个条件之一时，矩阵Q也满足此三条件之一。这就是说，当矩阵A满足引理1—2的条件时，矩阵Q也满足引理1—2的条件，从而$\det Q\neq 0$，这与$\det Q=0$的假设相矛盾。由此知$\rho(L_{\alpha,\beta,\tau})<1$，从而ETOR方法收敛，定理证毕。

注意到，SOR和AOR迭代都可作为ETOR迭代的特例，因而本文所述结论，都可相应地用到这些迭代法，包含了对这些迭代法的已有结论。

最后，应该指出，本文的部分结果也可在文[11]中找到。但显然我们的结论要广泛得多。

参　考　文　献

[1] M. Missirlis, J. Evans, On the Convergence of Some Generalized Preconditioned Iterative Methods, SIAM. J. NUMER. ANAL. 18(1981), 591-596.

[2] 匡蛟勋，关于解大线性系统的双参数松弛法，上海师范学院学报(自然科学版)4(1983).

[3] A. Hadjidimos, Accelerated Overrelaxation Method, Math. Comp, 32(1978), 149-157.

[4] R. S. Vraga, Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ,

(1962).
〔5〕R. S. Varga, Linear Algebra' App, 13(1976)1—9.
〔6〕陈培贤，AOR 方法的收敛性，计算数学5, 1(1983), 66—71.
〔7〕吴关初、汤健康，关于 AOR 方法的某些新结果. 杭州大学学报（自然科学版）3(1985).
〔8〕武汉大学，山东大学合编，计算方法，人民教育出版社，（1979）.
〔9〕孙澈，关于 Gauss 和 Seidel 迭代过程的一点注记，南开大学学报（自然科学版），4（1964）.
〔10〕D. M. Young, Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, New York and London, (1971).
〔11〕李燮璋、徐庆琮，关于解大线性系统的双参数松弛法的推广，上海师范大学学报，（自然科学版），1（1985）.

On the Convergence of Some Extrapolated Two-Paramater Overrelaxation Methods for Numerical Solution of Large Linear Systems

Zeng Wenping

Abstract

This paper applies the preconditioning tochniques introduced by Evans[1] and defines some extrapolated versions of the two parameter overrelaxation methods (Called ETOR method) for numerical solution of large linear System $AX=b$. The Jacobi method, the Gauss—seidel method, the SOR method, the SSOR method, the AOR method and the TOR[2] method are then its special cases. Finally, it establishes some convergence theorems for the considered iterative schemes when the coefficient matrices has particular properties such as being Hermite definite, H-and L-matrixs, having irreducible weak diagonal dominance, etc….