第7卷 第4期 华侨大学学报 Vol.7 No.4
1986年11月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY Nov. 1986

具有棱凝聚度≤1的顶点之个数估计

魏祖烈　　郭玉端

(华侨大学)　　(福州大学)

摘　　要

本文证明：当简单图G的棱连通度 $\lambda=1$ 或当G的阶 $n\leq 2\lambda(\lambda\geq 2)$ 时，G的任何点x都满足其棱凝聚度 $c'(x)\leq 1$；而当 $n>2\lambda(\lambda\geq 2)$ 时，满足 $c'(x)\leq 1$ 的顶点x的数目至少有 $(\lambda+2)$ 个.

一、引　　言

设 G 是阶为 n 的简单图，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和棱集。若 $x\in V(G)$，则 $G-x$ 表示从 G 中删去 x 后所得的图。若 $S\subset E(G)$，则 $G-S$ 表示从 G 中删去 S 后所得的图。如果 G 是连通的，而 $G-S$ 不连通，则称 S 是 G 的截集，G 的最小截集的基数称为 G 的棱连通度，记为 $\lambda(G)$ 或 λ。$G-x$ 的截集记为 L_x，它可表为 $L_x=[X,Y]_{G-x}$，其中 X，$Y\subset V(G)$，$X\cup Y=V(G-x)$，$X\cap Y=\phi$，L_x 中的每一条棱的两端分别在 X，Y 中。当 L_x 是 $G-x$ 的最小截集时，它的基数 $|L_x|=\lambda(G-x)$。

朱必文等在文[1]中引进

$$C_G'(x)=\lambda(G)-\lambda(G-x)$$

(下文简记为 $C'(x)$)表示 G 的顶点 x 的棱凝聚度，它表征顶点 x 对 G 的棱连通度的贡献，并证明了当 $C'(x)<0$ 时，有与文[2]关于 G 的顶点 x 的凝聚度 $C(x)=\mu(G)-\mu(G-x)<0$ 类似的性质，其中 $\mu(G)$ 表示 G 的顶点最小截集的基数。但对任意简单图 G，$C'(x)<0$ 或 $=0$ 的点 x 不一定存在，例如 $n\geq 3$ 的完全图。且对 $C(x)>0$ 必有 $C(x)=1$，而对 $C'(x)>0$ 没有类似的性质。本文证明，若记满足 $C'(x)\leq 1$ 的顶点 x 的集合为 C'_1，则 C'_1 必非空，即1是任意有限阶简单图顶点的棱凝聚度最小值的上界，並证明 C'_1 的数目 $|C'_1|$ 有如摘要中所说的最小值。以下记 $\bar{C}'_1=V(G)-C'_1$。

二、定理及其证明

引理1　设 $x\in V(G)$，$V(G-x)=X\cup Y$，$X\neq\phi$，$Y\neq\phi$，$X\cap Y=\phi$，$0<|X|<\lambda$，

本文1986年5月3日收到

$L_x=[X,Y]_{G-x}$，则 $|L_x|\geqslant\lambda-1$。

证明 设 $|X|=m$。关联 X 中的点的棱的数目至少有 λm 条(两端点皆在 X 中的棱重复计算一次)，而两端点皆在 X 中的棱至多有 $m(m-1)$ 条(同样每条都重复计算一次)，点 x 到 X 中的点的棱至多 m 条。所以得到两端点分别在 X,Y 中的棱的数目

$$l_x=|L_x|\geqslant\lambda m-m(m-1)-m=\lambda m-m^2$$

当 $0<m<\lambda$ 时有

$$l_x-(\lambda-1)\geqslant\lambda m-m^2-\lambda+1=(\lambda-1-m)(m-1)\geqslant0$$

得证。

引理 2 设 $\lambda\geqslant2$，$x_0\in\bar{C}'_1$。则对 $G-x_0$ 的任意最小截集 $L_{x_0}=[X,Y]_{G-x_0}$，$X\neq\phi$，$Y\neq\phi$，$X\cap Y=\phi$，$X\cup Y=V(G-x_0)$，$|L_{x_0}|=\lambda(G-x_0)$，记 $L_{10}=[x_0,X]_{G-Y}$，$L_{20}=[x_0,Y]_{G-X}$，必有

$|X|\geqslant\lambda$，$|Y|\geqslant\lambda$，$|L_{x_0}|\leqslant\lambda-2$，$|L_{10}|\geqslant2$，$|L_{20}|\geqslant2$，$n>2\lambda$。

证明 由 $C'(x_0)>1$，得 $|Lx_0|=\lambda(G-x_0)\leqslant\lambda-2$。如果 $|X|<\lambda$，由引理1将有 $|L_{x_0}|\geqslant\lambda-1$ 的矛盾，所以 $|X|\geqslant\lambda$，同理 $|Y|\geqslant\lambda$。由于 $L_{10}\cup L_{x_0}$ 是 G 的截集，$L_{10}\cap L_{x_0}=\phi$，而 λ 是 G 的最小截集的基数，故 $|L_{10}\cup L_{x_0}|=|L_{10}|+|L_{x_0}|\geqslant\lambda$，从而 $|L_{10}|\geqslant2$. 同理 $|L_{20}|\geqslant2$。由 $V(G)=X\cup Y\cup\{x_0\}$ 得 $n>2\lambda$。证毕。

定理 1 当 $\lambda=1$ 或 $n\leqslant2\lambda(\lambda\geqslant2)$ 时，$|C'_1|=n$。

证明 当 $\lambda=1$ 时，$C'(x)=\lambda(G)-\lambda(G-x)\leqslant1$。

当 $n\leqslant2\lambda(\lambda\geqslant2)$ 时，若 G 中存在一点 $x_0\in\bar{C}'_1$，由引理 2，将有 $n>2\lambda$，与假设矛盾。

推论 设顶点 x_0 的度 $d(x_0)\leqslant3$，则 $x_0\in C'_1$。

证明 若 $\lambda=1$，由定理 1 得证。若 $\lambda\geqslant2$ 而 $x_0\in\bar{C}'_1$，由引理 2 将有 $d(x_0)=|L_{10}|+|L_{20}|\geqslant4$，与假设矛盾。

定理 2 当 $n>2\lambda$，$\lambda\geqslant2$ 时，$|C'_1|\geqslant\lambda+2$.

证明 若 $V(G)=C'_1$ 或 $V(G)-\{x_0\}=C'_1$，则 $|C'_1|\geqslant n-1\geqslant2\lambda\geqslant\lambda+2$，定理成立。

设 $x_0\in\bar{C}'_1$，沿用引理 2 的所有记号。又设 $x_1\in X$，$x_1\in\bar{C}'_1$。记 $L_{x_1}=[X_1,Z_1]_{G-x_1}$ 为 $G-x_1$ 的一最小截集，$X_1\neq\phi$，$Z_1\neq\phi$，$X_1\cap Z_1=\phi$，$X_1\cup Z_1=G-x_1$，则 $|L_{x_1}|=\lambda(G-x_1)\leqslant\lambda-2$，$|X_1|\geqslant\lambda$，$|Z_1|\geqslant\lambda$，记 $L_{11}=[x_1,X_1]_{G-Z_1}$，$L_{21}=[x_1,Z_1]_{G-X_1}$，则 $|L_{11}|\geqslant2$，$|L_{21}|\geqslant2$.

现在讨论如下情况：L_{x_1} 含有两端皆在 X 中的棱。设这些棱是集 L'_{x_1}，它将 $X-x_1$ 分成两非空不交子集 $X^{(1)},\bar{X}^{(1)}$，使 $L'_{x_1}=[X^{(1)},\bar{X}^{(1)}]_{G-(Y\cup\{x_1\}\cup\{x_0\})}$，$L'_{x_1}\subset L_{x_1}$。除了 L'_{x_1} 外，L_{x_1} 还可能含有 $L_{10}\cup L_{20}$ 及 L_{x_0} 的一部分棱，记它们是 L'_{12} 及 L'_{x_0}，$L'_{12}\subset L_{x_1}$，$L'_{x_0}\subset L_{x_1}$。

我们证明，L_{x_1} 作为 $G-x_1$ 的最小截集之一，可选取它是不含有两端点均在Y中的任何棱。因 x_0 属 X_1，Z_1之一，不仿设 $x_0\in Z_1$，现证可选取 L_{x_1} 使 X_1 不含 Y 中的点，或证 $X_1=X^{(1)}\subset X$。否则，存在 $Y_1\neq\phi$ 和 $Y_2\neq\phi$，使 $X_1=X^{(1)}\cup Y_1$，$Z_1=\bar{X}^{(1)}\cup Y_2\cup\{x_0\}$，且 $L'_Y=[Y_1,\ Y_2]_{G-(X\cup\{x_0\})}\subset L_{x_1}$.此时有 $L'_{x_0}=[X^{(1)},Y_2]\cup[\bar{X}^{(1)},\ Y_1]$，记 $L''_{x_0}=[X^{(1)},Y_1]$，$L'''_{x_0}=[\bar{X}^{(1)},Y_2]$， 则 $L_{x_1}=L'_{x_1}\cup L'_{12}\cup L'_{x_0}\cup L'_Y$，$L_{x_0}=L'_{x_0}\cup L''_{x_0}\cup L'''_{x_0}$，但 $L'_Y\cup L'_{x_0}\cup L'''_{x_0}$ 是 $G-x_0$ 的截集，而 L_{x_0} 是 $G-x_0$ 的最小截集，故 $|L_{x_0}|=|L'_{x_0}\cup L''_{x_0}\cup L'''_{x_0}|\leqslant|L'_Y\cup L'_{x_0}\cup L'''_{x_0}|$，由此得 $|L''_{x_0}|\leqslant|L'_Y|$，且 $L'_{x_1}\cup L'_{12}\cup L'_{x_0}\cup L''_{x_0}$ 也是 $G-x_1$ 的最小

截集，选它作为 L_{x1} 就能使 X_1 中不含 Y 中的点，此时 $X_1=X^{(1)}\subset X$，且由引理2，$|X_1|\geqslant\lambda$。

如果 X_1 中又有一点 $x_2\in\bar{C}_1'$，且使 L_{x_2} 含有两端点均在 X_1 中的棱，则依同样理由可选得 $L_{x_2}=[X_2,Z_2]_{G-x_2}$，$|L_{x_2}|=\lambda(G-x_2)$，且 $X_2\subset X_1\subset X$，$|X_2|\geqslant\lambda$，经有限步骤最终可得一集 $X_k\subset X$，$|X_k|\geqslant\lambda$，且若 X_k 中含有任何点 x'，使 $x'\in\bar{C}_1'$ 时，L_x 必不再含有两端点均在 X_k 中的棱。

现考察 X_k 至多还能含多少个属 $\bar{C}_1'$ 的点。

设 $x'\in X_k$，$x'\in\bar{C}_1'$。由于 $L_{x'}$ 已不含两端皆在 X_k 中的棱，因此 $L_{x'}$ 只由 $L_{xk}=[X_k,Z_k]_{G-x_k}$，$L_{1k}=[x_k,X_k]_{G-Z_k}$，$L_{2k}=[x_k,Z_k]_{G-X_k}$ 的一部分棱组成，$|L_{xk}|=\lambda(G-x_k)$。

为满足 $|L_{x'}|\leqslant\lambda-2$，$x'$ 必关联 $L_{xk}\cup L_{1k}$ 中至少两条棱，但 x' 至多关联 L_{1k} 的一棱，故 x' 必关联 L_{xk} 的至少一棱。记 $|L_{1k}|=l_{1k}$，$|L_{2k}|=l_{2k}$，$|L_{xk}|=l_{xk}$，$l_k=\min(l_{1k},l_{2k})$。

a)当 $l_k+l_{xk}>\lambda$ 时，为使 $|L_{x'}|\leqslant\lambda-2$，$x'$ 必关联 L_{xk} 的至少两棱。此时 X_k 中属 $\bar{C}'_1$ 的点的数目至多 $[\lambda/2]-1$ 个。

b)当 $l_{1k}+l_{xk}=\lambda$ 时，如果 $l_{1k}\geqslant l_{xk}$，则 X_k 中属 $\bar{C}'_1$ 的点数目至多 $l_{xk}\leqslant[\lambda/2]$ 个。如果 $l_{1k}<l_{xk}$，则 X_k 中属 $\bar{C}'_1$ 的点的数目至多 $l_{1k}+[l_{xk}-l_{1k}/2]\leqslant[l_{1k}+l_{xk}/2]=[\lambda/2]$ 个。

c)特别当 $|X_k|=\lambda$ 时，由于 $d(x)\geqslant\lambda$，$x\in X_k$，X_k 中任何一点都必关联 L_{xk} 或 L_{1k} 的棱。若 $l_{1k}+l_{xk}=\lambda$，则 X_k 中每一点只能关联 L_{xk} 或 L_{1k} 之一棱，故 X_k 中任何一点 x' 都不可能使 $|L_x'|\leqslant\lambda-2$，即 X_k 中点全属 C'_1 的点。若 $l_k+l_{xk}>\lambda$，则由a)，X_k 中属 $\bar{C}'_1$ 的点的数目至多 $([\lambda/2]-1)$ 个。

综上所述，X_k 中属 C'_1 的点的数目至少有 $\lambda-([\lambda/2]-1)=\lambda-[\lambda/2]+1$ 个。

同理，Y 中存在一子集 Y_l，使 $|Y_l|\geqslant\lambda$，Y_l 中属 C'_1 的点的数目至少 $(\lambda-[\lambda/2]+1)$ 个。

因此，$V(G)$ 中属 C'_1 的点至少 $\lambda+2$ 个。证毕。

下面是证明的图例，$\lambda=4$。由图1可见，$|C'_1|$ 可取到 $\lambda+2$。

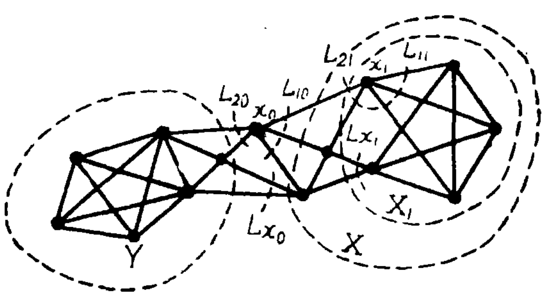

图 1

参考文献

〔1〕朱必文、刘峙山、陈子岐，关于顶点的棱-凝聚度的一个定理，内蒙古大学学报(自然科学)，16，3(1985)。

〔2〕Jin Akiyama, Frank Boesch, Hiroshi Era, Frank Harary, Ralph Tindell, Tha Cohesiveness of a Point of a Graph. Networks, 11, (1981), 65—68.

The Estimation of the Number of Vertices as Its Edge-Cohesiveness $\leqslant 1$ in a Graph

Wei Zulie Guo Yuduan

Abstract

Let G be a connected graph, $\lambda=\lambda(G)$ be the edge-connectivity of G, $C'(x)=\lambda(G)-\lambda(G-x)$ be the edge-cohesiveness of the vertex x, and n be the order of G. We have then

Theorem 1. If $\lambda=1$ or $n\leqslant 2\lambda(\lambda\geqslant 2)$, always satisfies $C'(x)\leqslant 1$ for any vertex x of G.

Theorem 2. If $n>2\lambda(\lambda\geqslant 2)$, the number of vertices $\{x\}$ of $C'(x)\leqslant 1$ will be $(\lambda+2)$ at least.