

# 热特性参数可变时变截面环肋的传热研究

杨 翔 翔

(化工与生化工程系)

## 摘 要

本文导出了热特性参数不为常数时变截面环肋的控制微分方程,并对导热系数是温度的线性函数,放热系数沿肋片长度变化时的情形进行数值求解。

该控制微分方程是一个非线性的微分方程,用四阶龙格库塔法和牛顿拉伐森迭代法求解,得到沿肋片长度方向上的温度分布曲线,接着又探讨了导热系数变化因子 $\alpha$ ,几何形状因子 $D_b$ ,肋片因子 $N$ 的影响问题,所得结果对于肋片的设计和选型以及进一步研究肋片的换热问题,都具有重要的意义。

## 引 言

为了增强物体表面与周围流体之间的热交换,一般可以增加物体与流体之间的接触面积这可以通过肋片,翼片以及各种扩展延伸物得到。

肋在各种热交换器中的使用是十分普遍的。如在电机壳体,电冰箱冷凝管以及宇宙飞船上都得到广泛应用。

肋片有多种形式,其横截面的形状也不一,通常有矩形的、双曲线形的,抛物线形的和梯形的等。

对于导热系数和放热系数均为常数的肋片问题,在许多传热学教科书中有叙述<sup>[1-4]</sup>,但在很多情况下,它们都不能认为是常数<sup>[5-6]</sup>。

本文首先研究导热系数随温度呈线性变化和放热系数沿肋片长度方向变化的情况,考虑到这些问题,控制微分方程是非线性的。大家知道,对于大多数的非线性方程要获得解析解是十分困难的,数值解在这里特别有用,文献<sup>[7-9]</sup>研究了这些非线性问题。

本文推导了一个适合于热特性参数不为常数的变截面肋片的控制微分方程,用四阶龙格-应塔法和牛顿-拉伐森法求解<sup>[9-12]</sup>;然后将分析导热系数变化因子 $\alpha$ ,几何形状因子 $D_b$ ,肋片因子 $N$ ,放热系数变化因子等对热流率 $Q$ 和肋效率 $\eta$ 的影响,最后还研究肋片的不同形状对 $Q$ 的影响。

本文1986年1月11日收到。

本文是作者在美国堪萨斯州立大学完成的。

原文为英文,翁荣周老师将其翻译成中文。

## 数 学 模 型

先作如下假设:

①导热是一维的; ②稳定导热; ③忽略辐射换热; ④肋的端部是绝热的。

现在我们考虑如图 1 所示的环形

肋。在稳定情况下, 微元体  $dr$  内的热平衡是

$$q_r - (q_r + \frac{dq_r}{dr} dr) - 2q_c = 0 \quad (1)$$

$q_r$ —沿  $r$  方向的热流率;

$q_c$ —在肋的上下两面由于对流换热而散出的热量。

由付立叶公式有

$$q_z = -k2\pi r(2y(r)) \frac{dt}{dr} \quad (2)$$

$$q_c = h(2\pi r) \frac{dr}{\cos \varphi} (t - t_\infty) \quad (3)$$

式中,  $t_\infty$  环境温度。

将式(2)、(3)代入式(1)得

$$-\frac{d}{dr} \left[ k r y(r) \frac{dt}{dr} \right] - \frac{hr}{\cos \varphi} (t - t_\infty) = 0 \quad (4)$$

定义如下无因次温度

$$\theta = \frac{t - t_\infty}{t_b - t_\infty} = \frac{T}{T_b} \quad (5)$$

其中,  $t_b$ ——肋片根部温度。由于  $t_b$ 、 $t_\infty$ ——一般都是常数, 故

$$\theta(t_b - t_\infty) = t - t_\infty$$

$$\frac{d\theta}{dr} (t_b - t_\infty) = \frac{dt}{dr} \quad (6)$$

设导热系数随温度呈线性变化

$$k(\theta) = k_a(1 + \alpha\theta) \quad (7)$$

式中,  $\alpha$ ——导热系数变化因子;  $k_a$ ——相当于根部温度时的导热系数。

而放热系数考虑是  $r$  的函数, 即  $h = h(r)$ , 将式(5)、(6)、(7)代入式(4)得

$$\frac{d}{dr} \left[ k_a(1 + \alpha\theta) r y(r) \frac{d\theta}{dr} \right] - \frac{r h(r)}{\cos \varphi} \theta = 0$$

改写上式得一维传热方程

$$\begin{aligned} (1 + \alpha\theta) y(r) \frac{d^2\theta}{dr^2} + \alpha y(r) \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 + (1 + \alpha\theta) \frac{y(r)}{r} \frac{d\theta}{dr} \\ + (1 + \alpha\theta) \frac{dy(r)}{dy} \frac{d\theta}{dr} - \frac{h(r)\theta}{k_a \cos \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

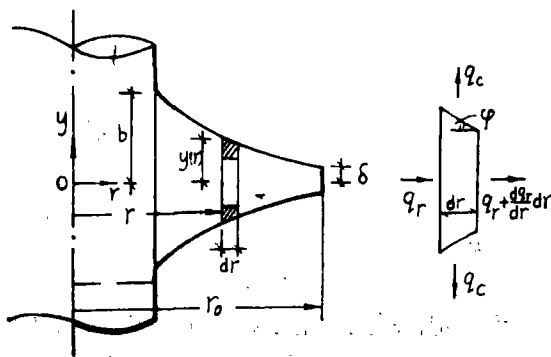


图 1

如果在式(8)中的第三项乘上因子  $s$ , 就可将式(8)表示成更一般的形式

$$(1+\alpha\theta)y(r)\frac{d^2\theta}{dr^2} + \alpha y(r)\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + S(1+\alpha\theta)\frac{y(r)}{r}\frac{d\theta}{dr} + (1+\alpha\theta)\frac{dy(r)}{dr}\frac{d\theta}{dr} - \frac{h(r)\theta}{k_a\cos\varphi} = 0 \quad (9)$$

对于环肋:  $s=1$ ; 直肋:  $s=0$ . 本文考虑环肋, 因此  $s=1$ .

作为式(9)的应用, 下面考虑几种特殊情况:

### 1. 热特性参数可变时, 圆管型设备上的矩形环肋

此时

$$y(r) = \delta = \text{常数} \quad (10)$$

$$\cos\varphi = 1$$

令

$$R = \frac{r-r_b}{r_0-r_b} \quad (11a)$$

则

$$dr = (r_0 - r_b)dR \quad (11b)$$

又设换热系数随肋片长度变化可表示成如下式子

$$h(r) = h_a f(R) \quad (12)$$

并定义肋片因子

$$N^2 = \frac{h_a(r_0 - r_b)^2}{k_a \cdot \delta} \quad (13)$$

对于给定肋片  $r_0, r_b$  为常数, 故

$$D_b = \frac{r_b}{r_0 - r_b} \quad (14)$$

也为常数, 将式(10)~(14)代入式(9), 得矩形截面环肋的控制微分方程

$$(1+\alpha\theta)\frac{d^2\theta}{dR^2} + \alpha\left(\frac{d\theta}{dR}\right)^2 + \frac{(1+\alpha\theta)}{(R+D_b)}\frac{d\theta}{dR} - N^2 f(R)\theta = 0 \quad (15)$$

边界条件是

$$R=0, \theta=1 \quad (16a)$$

$$R=1, \frac{d\theta}{dR}=0 \quad (16b)$$

### 2. 热特性参数可变时, 圆管型设备上的双曲线形环肋

此时

$$y(r) = \frac{\delta \cdot r_0}{r} \quad (17a)$$

$$\frac{dy(r)}{dr} = -\frac{\delta r_0}{r^2} \quad (17b)$$

将式(17)代入式(9), 得双曲线形截面环肋的控制方程

$$(1+\alpha\theta)\frac{d^2\theta}{dR^2} + \alpha\left(\frac{d\theta}{dR}\right)^2 - N^2\left(\frac{R+D_b}{D_0}\right)f(R)\theta = 0 \quad (18)$$

边界条件

$$R=1, \frac{d\theta}{dR}=0 \quad (19b)$$

$$R=0, \theta=1 \quad (19a)$$

这里

$$N^2 = \frac{h_a(r_0 - r_b)^2}{k_a \delta \cos \varphi}, \quad D_0 = \frac{r^0}{r_0 - r_b} \quad (20)$$

### 3. 热特性参数可时, 圆管型设备上的二次双曲线环肋

此时

$$y(r) = \delta \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \quad (21a)$$

$$\frac{dy(r)}{dr} = -\frac{2\delta r_0^2}{r^3} \quad (21b)$$

将式(21)代入式(9), 得控制方程

$$\begin{aligned} (1+\alpha\theta) \frac{d^2\theta}{dR^2} + \alpha \left( \frac{d\theta}{dR} \right)^2 - (1+\alpha\theta) \frac{1}{R+D_b} \frac{d\theta}{dR} \\ - N^2 f(R) \theta \frac{R^2 + 2RD_b + D_0^2}{D_0^2} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

边界条件

$$R=0, \theta=1 \quad (23a)$$

$$R=1, \frac{d\theta}{dR}=0 \quad (23b)$$

这里,  $N^2$  与式(20)同。

### 4. 圆管上抛物线环肋

此时

$$y(r) = \delta + \frac{(b-\delta)(r_0-r)^2}{(r_0-r_b)^2} \quad (24a)$$

$$\frac{dy(r)}{dr} = -\frac{2(b-\delta)}{(r_0-r_b)^2} (r_0-r) \quad (24d)$$

将它代入式(9)得

$$\begin{aligned} (1+\alpha\theta) \frac{d^2\theta}{dR^2} + \alpha \left( \frac{d\theta}{dR} \right)^2 + (1+\alpha\theta) \frac{1}{R+D_b} \frac{d\theta}{dR} \\ - (1+\alpha\theta) \frac{2(N_2-N_1)(D_0-R-D_b)}{[(N_2-N_1)(D_0-R-D_b)^2+N_1]} \frac{d\theta}{dR} \\ - N^2 f(R) \theta \frac{N_1}{[(N_2-N_1)(D_0-R-D_b)^2+N_1]} \\ = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

式中

$$N_1 = \frac{\delta}{r_0 - r_b}, \quad N_2 = \frac{b}{r_0 - r_b} \quad (26)$$

$$N^2 = \frac{h_a(r_0 - r_b)^2}{k_a \delta \cos \varphi} \quad (27)$$

边界条件是

$$R = 0, \theta = 1 \quad (28a)$$

$$R = 1, \frac{d\theta}{dR} = 0 \quad (28b)$$

## 换 热 问 题

在稳定情况下, 从肋向周围环境散射出去的热量

$$q = -k(\theta)A_b \left. \frac{dt}{dr} \right|_{r=r_b} \quad (29)$$

式中,  $A_b$ ——肋片根部面积。

将式(6)、(7)和(11)代入式(2), 得无因次热流率为

$$Q = -(1 + \alpha\theta) \left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=0} \quad (30)$$

其中, 无因次热流率定义为

$$Q = \frac{q}{4\pi D_b b (t_b - t_\infty) k_a} \quad (31)$$

## 肋 效 率

肋效率定义为肋的实际传热量与肋的最大可能传热量的比值, 后者是指肋上各点的温度都等于根部温度时的传热量。对于矩形肋, 它等于

$$Q_{\max} = \int_{r_b}^{r_0} 2\pi r \cdot 2dr h(\tau) (t_b - t_\infty) \quad (32)$$

代入无因次半径 $R$ , 得

$$Q_{\max} = 4\pi T_b k_a \delta N^2 D_b \int_0^1 \left( -\frac{R}{D_b} + 1 \right) f(R) dR \quad (33)$$

由式(31)可得实际传热量为

$$q = Q \cdot 4\pi D_b \cdot b \cdot T_b k_a$$

因此肋效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{q}{Q_{\max}} \\ &= \frac{bQ}{\delta N^2 \int_0^1 \left( -\frac{R}{D_b} + 1 \right) f(R) dR} \end{aligned} \quad (34)$$

令

$$I = \int_0^1 \left( -\frac{R}{D_b} + 1 \right) f(R) dR \quad (35)$$

则

$$\eta = \frac{Q}{\delta \cdot N^2 I} \quad (36)$$

### 数值方法与数值解

设

$$y = \theta \quad (37)$$

$$z = \frac{d\theta}{dR} \quad (34)$$

则式(15)化为

$$\frac{dy}{dR} = z$$

$$\frac{dz}{dR} = \frac{1}{1 + \alpha y} \left[ N^2 f(R) y - \alpha z^2 - (1 + \alpha y) \cdot z / (R + D_0) \right] \quad (39)$$

边界条件是

$$R = 0, y = 1$$

$$R = 1, z = 0$$

此时,  $R=0$  处的  $z$  值是一个未知量, 该方程属于两点边值问题, 我们采用四阶龙格—库塔法和牛顿—拉伐森迭代法求解。

它的基本思想是: 先假设  $R=0$  处,  $z$  的初值, 按龙库塔法求出  $R=1$  处的  $z_1$  值, 通常这第一次假设的初值, 不能满足  $R=1$  处  $z=0$  的条件。因此, 适当假设第二个初值。再通过龙格—库塔法求出第二个  $R=1$  的  $z_2$  值,  $z_2$  值也通常不为零, 此后, 用牛顿—拉伐森法求初值, 重复以上作法, 直到  $R=1$  处的  $z$  值与零之差小于某一个精度为止

当沿肋片长度方向温度分布已知, 可以求出  $\left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=0}$  的值, 这样传热量  $Q$  也就知道。

对于整个的计算, 本文编制了计算程序和作图程序, 整个计算和作图都在计算机上完成, 图2示出了计算机框图, 表1列出了程序变量名, 由于篇幅所限, 计算程序和作图程序这里不再赘述。

表 1 程 序 变 量 名

变 量 名	定 义
L、S、M、C <sub>1</sub> 、R	逻辑变量
T <sub>8</sub> 、T <sub>9</sub>	打印控制量
X <sub>9</sub>	R 的最大值
H	ΔR 增量
$N, N^2 = \frac{h_a(r_0 - r_b)^2}{a k \delta}$	因子
$D, D_0 = \frac{r_b}{r_0 - r_b}$	因子
A, α	导热系数变化因子

表 1 程 序 名 变 量	
变 量 名	定 义
$F_r, f(R)$	换热系数变化因子
X	自变量 R
YO	$\theta$ 初始值
ZO	$\frac{d\theta}{dR}$ , 初值
Y	自变量
Z	温度梯度
G	温度二阶导数
$K_1, K_2, K_3, K_4$	R-K 法系数(求 $\theta$ 时)
$L_1, L_2, L_3, L_4$	R-K 法系数(求 $\frac{d\theta}{dR}$ 时)
G1	在 $R=0$ 处, $\frac{d\theta}{dR}$ 的初值
G2	在 $R=0$ 处, $\frac{d\theta}{dR}$ 的另一初值
I1	由 G1 计算出的在 $R=1$ 处 $\frac{d\theta}{dR}$ 值
I2	由 G2 计算出的在 $R=1$ 处 $\frac{d\theta}{dR}$ 值

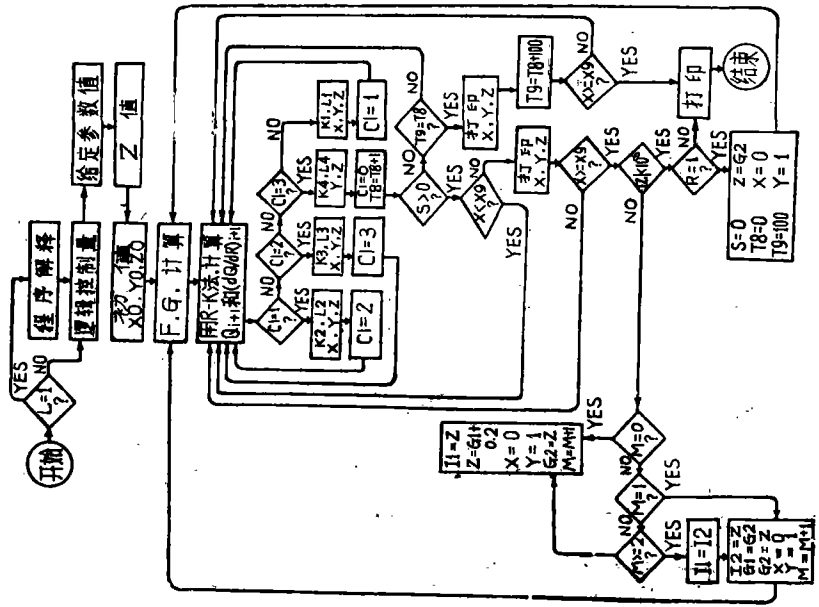


图 2 肋片计算机计算框图

## 结 果 和 讨 论

在进行肋片的设计和选型时通常都需要知道肋片的散热量, 对不同的肋片和不同的换热参数下, 其散热量是不同的, 本文在广泛的参数范围内, 经计算机反复计算, 得到了温度分布曲线, 热流率曲线, 肋效率曲线, 这些曲线可供矩形截面, 双曲线截面, 抛物线形截面肋片的设计和选型之用。下面分别讨论这些曲线。

## 1. 温度分布曲线

温度分布曲线对于确定肋片的散热量是十分重要的。因为知道了温度分布曲线就可以确定肋片的换热量。

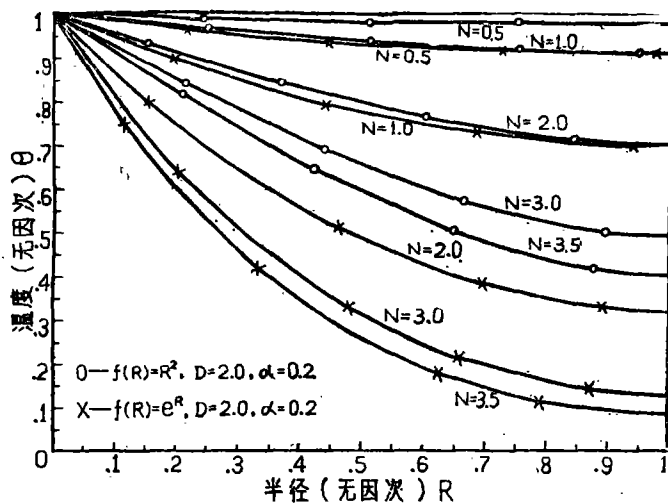


图 3 不同肋片因子  $N$  下的温度分布曲线

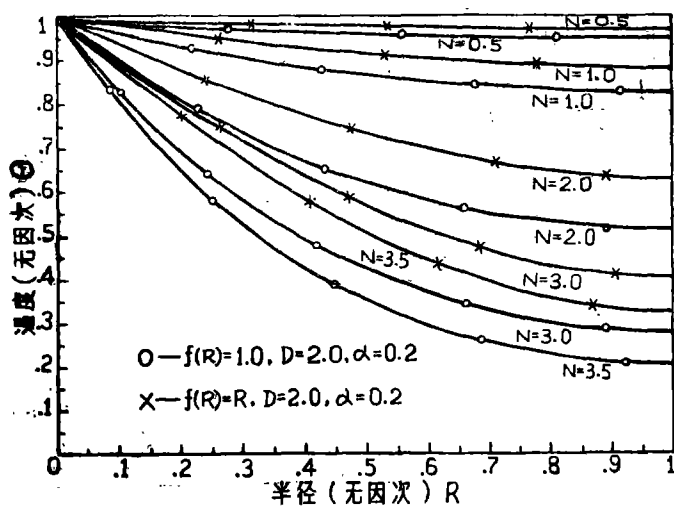


图 4 不同肋片因子  $N$  下的温度分布曲线



图3、4给出了不同的肋片因子  $N$  下的温度分布曲线,从图可知,随着肋片因子  $N$  的增加,温度曲线急骤下降,这是因为  $N$  增加时从肋片散射出去的热量增大之故,故曲线下降。

图5、6给出了温度分布随  $D_0$  变化曲线,图7、8给出了温度分布随  $\alpha$  的变化曲线。

由图3—8可看出,随  $f(R)$  的不同,温度分布线也不同。对于  $f(R) = e^R$ , 散热量最大,故温度分布线最低。对于  $f(R) = R^2$ , 散热量最小,温度分布线最高,可以看出这些曲线的变化趋势。都与换热的物理模型一致。

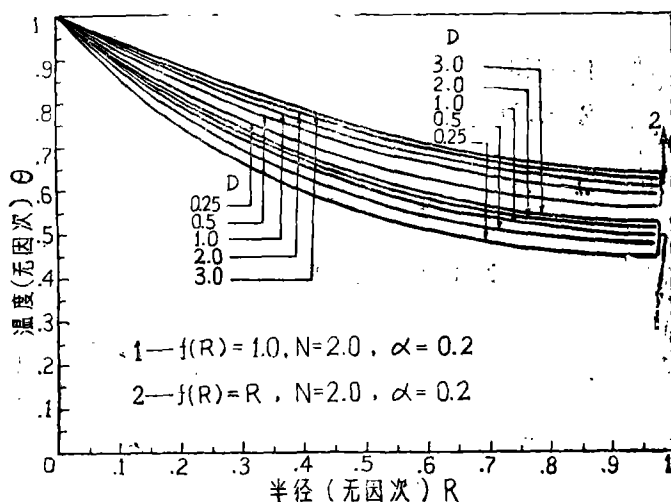
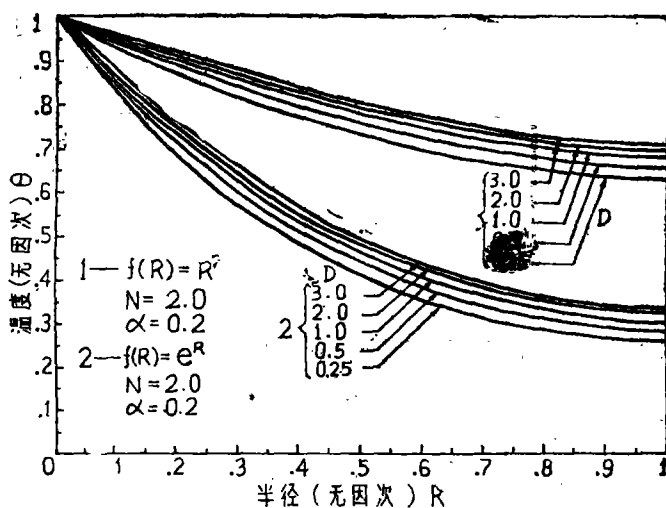
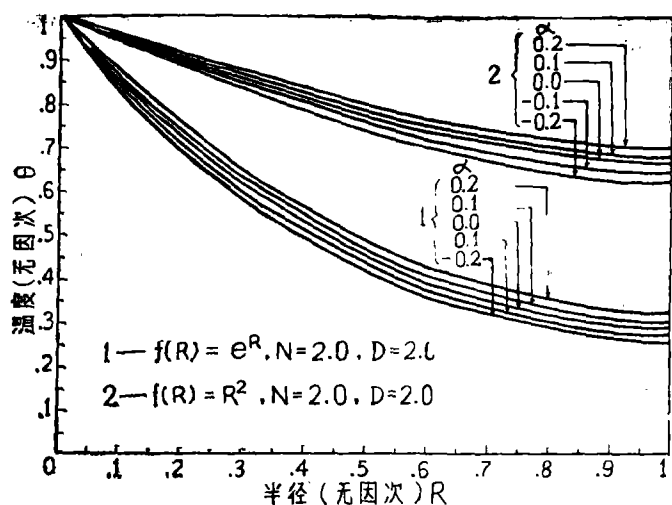
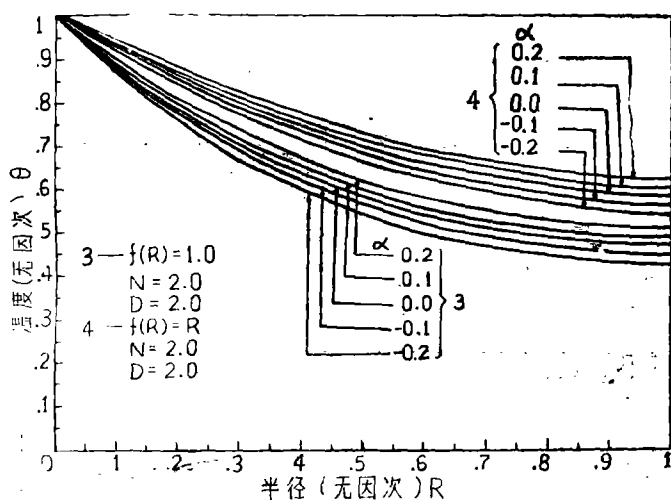


图5 温度分布随  $D$  变化曲线



温度分布随  $D$  变化曲线

图 7 温度随  $\alpha$  变化曲线图 8 温度分布随  $\alpha$  变化曲线

## 2. 热流率 $Q$

在进行肋片设计时, 通常都需要知道热流率, 图 9、10 和 11 给出了热流率分别随肋片因子  $N$ , 导热系数变化因子  $\alpha$  和几何因子  $D$  的变化曲线。

## 3. 肋效率 $\eta$

对于圆管形设备上的矩形环肋,  $b = \delta$ ,  $\cos \varphi = 1$  故肋效率为

$$\eta = \frac{Q}{N^2 I}$$

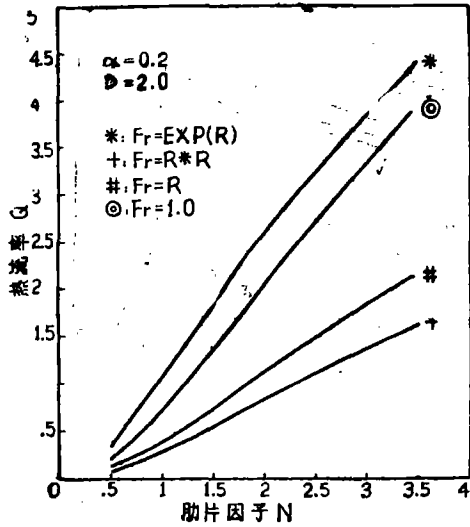


图 9 热流率随肋片因子 N 的变化曲线

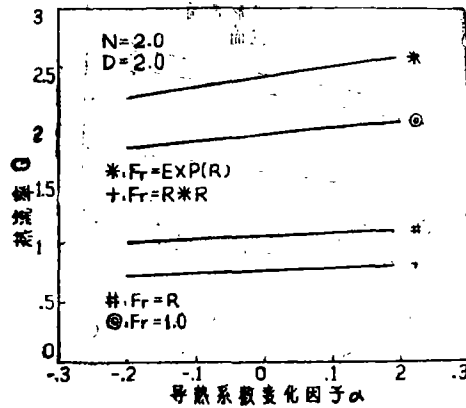


图 10 热流率随  $\alpha$  变化曲线

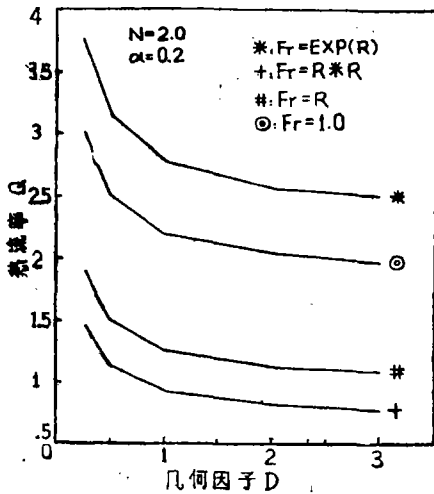


图 11 热流率随 D 变化曲线

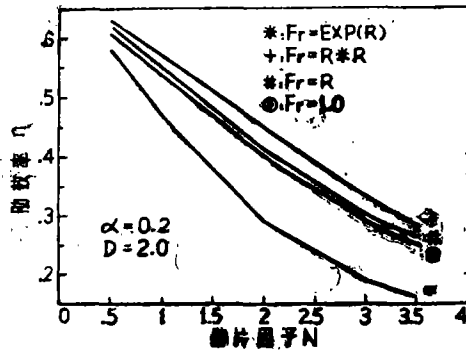


图 12  $\eta$  与 N 变化曲线

对于四种不同换热系数变化因子,  $I$  值如下:

$f(R) = 1, \quad I = (1 + 2D_b)/2D_b, \quad (40a)$

$f(R) = R, \quad I = (2 + 3D_b)/6D_b, \quad (40b)$

$f(R) = R^2, \quad I = (3 + 4D_b)/12D_b, \quad (40c)$

$f(R) = e^R, \quad I = (1 + 1.72D_b)/D_b, \quad (40d)$

图 12、13 和 14 示出了  $N-\eta$ 、 $\alpha-\eta$  和  $D-\eta$  的变化曲线。我们看到肋效率的值都不大, 但在肋片设计和选型中重要的是  $Q$  而不是  $\eta$ 。

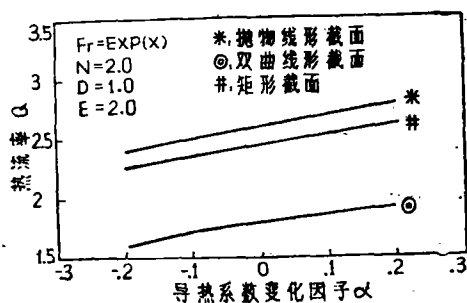
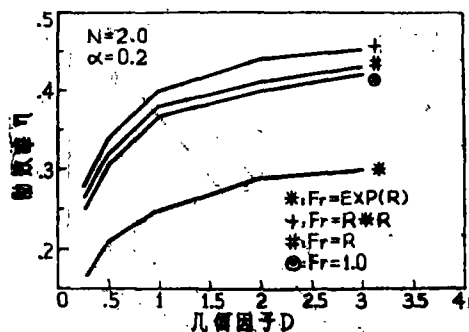
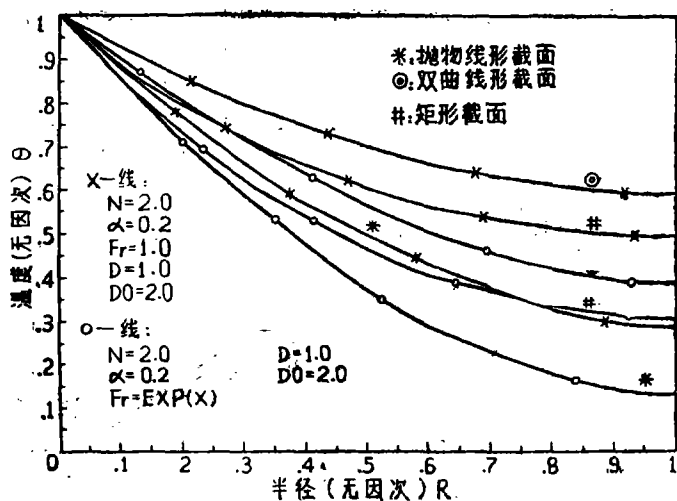
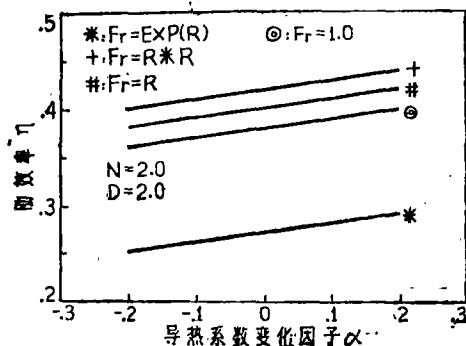
图 13  $\eta$  与  $\alpha$  的变化曲线图 14  $\eta$  与  $D$  的变化曲线

图 15 不同肋片的温度分布曲线

#### 4. 几种不同横截面的比较

图15给出了不同肋片的温度分布曲线, 图16是不同肋片热流率与导热系数变化因子关系曲线。从图15可以看到在其他条件都一样的情况下, 双曲线截面传热效果最好。

最后, 还必须指出, 肋片的优化问题, 我们在这里还没有涉及, 这是一个值得今后继续进一步讨论的问题

图 16 热流率  $Q$  与  $\alpha$  的变化曲线

致谢: 堪萨斯州立大学机械工程系教授 C. L. D 哈根博士, 对完成这篇论文过程中所给予的指导和帮助, 表示衷心谢意。

### 参 考 文 献

- [1] Incropera F. R., Fundamentals of Heat Transfer, John Wiley and Sons, (1981).
- [2] Welty, J. R., Engineering Heat Transfer, John Wiley and Sons, (1978).
- [3] Chapman, A. J., Heat Transfer, The Macmillan Company, (1960).
- [4] Arpaci, V. S., Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley Publishing Company, (1966).
- [5] Masliyah, J. H., and Nandkumar, K., Heat Transfer in internally Finned Tubes, ASME Journal of Heat Transfer, 98, 2, (1978).
- [6] Sparrow, Z. M., Baliga R. B., and Patankar, V. S., Forced Convection Heat Transfer From a Shrouded Fin Array With and without Tip Clearance, ASME Journal of Heat Transfer, 100, 4, (1978), 572—579.
- [7] Aziz, A., and Na, T. Y., Periodic Heat Transfer in Fins With Variable Thermal Parameters, International Journal of Heat and Mass Transfer, 24, 8, (1981), 1397—1404.
- [8] Yang, W. J., Periodic Heat Transfer in Straight Fins, ASME Journal of Heat Transfer, 94, 1, (1972), 310—314.
- [9] Adams, J. A., and Rogers, D. F., Computer Aided Heat Transfer Analysis McGRAW-HILL BOOK COMPANY, (1973).
- [10] Pipls, L. A., Applied Mathematics for Engineers and Physicists, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, (1958).
- [11] Lee, E. S., Quasilinearization and Invariant Imbedding with Applications to Chemical Engineering and Adaptive Control, Academic Press, (1968).
- [12] Roberts, S. M., and Shipman, J. S., Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods, American Elsevier Publishing Company, (1972).

## A Study on Heat Transfer in the Fins of variable Thermal parameters and variable Cross Section

Yang Xiangxiang

### Abstract

In this paper, a general differential equation suitable for the fins of variable cross section is derived, and a numerical solution for the problem of circular fin, of which the thermal conductivity is a linear function of temperature, types of variation are considered.

By means of fourth order Runge-Kutta integration scheme and Newton-Raphson iteration technique, the nonlinear differential equation is solved, and the temperature profile along the length of the fin is obtained.

And then, the conductivity parameter  $\alpha$ , the geometric parameter  $Db$ , the fin parameter  $N$  and the type of transfer coefficient variation, of all these factors the effects on heat transfer rate  $Q$  and efficiency of the fin  $\eta$ , are studied qualitatively. Several fins of different cross section are studied.

The results obtained are important for the design and type choosing of the fins and for the further study on heat transfer in the fins.