

非正态分布工艺设备调整数学模型

陈希达 陈宝珊

(精密机械工程系)

摘 要

此文是文〔1〕的续篇, 文章利用序贯分析法建立精密机械加工中另外两种常见分布, 即偏心分布和不等壁分布工艺设备调整数学模型。同样文中编制了与模型对应的计算机程序, 该程序可供生产人员直接使用。这样连同文〔1〕将作为 CAM 的重要组成部分。

一、偏心分布工艺设备调整数学模型

精密机械加工中有许多尺寸或形位参数是服从于偏心分布, 例如: 两个圆柱面之间的同心度, 两个平面之间的不平行度, 两个平面的垂直度等形位误差都服从于这种分布^[2]。

尺寸或形位参数的偏心分布是由于工艺设备内在的多种因素引起的。

假设平面上具有 n 个偏心量 $t_i (i=1, \dots, n)$ 则尺寸偏心量 ρ 可用下式表示

$$\rho = \sum_{i=1}^n t_i$$

如图 1。在保持 $\theta_j (j=1, \dots, n-1)$ 由 0 到 π 各按均等律分布, $t_i (i=1, \dots, n)$ 由 0 到 ∞ 各按偏心律分布的情况下, 其合成量 ρ 的分布律仍然是偏心律^[5], 其分布密度函数为

$$q(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$$

其中 $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ 。 σ_i 为偏心量 t_i 的分布参数。

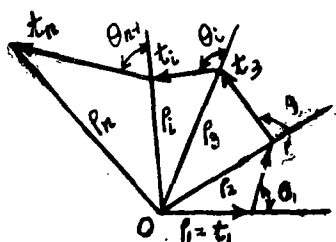


图 1

我们容易验证下列各式成立

本文1985年10月15日收到。

$$E(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma$$

$$D(\rho) = (2 - \frac{\pi}{2}) \sigma^2 \quad (4)$$

式(3)、(4)中的 $E(\rho)$ 、 $D(\rho)$ 分别表示尺寸参数偏心量 ρ 的数学期望和方差。

如图2, 取 ρ 的容许危率为 0.275%, 我们求下列积分等式成立的 ρ_k 。

$$\int_{R_k \sigma^2}^{\infty} \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = 0.275\% \quad (5)$$

由式(5), $\rho_k = 3.434\sigma$ 或者

$$\sigma = 0.291\rho_k \quad (6)$$

把式(6)中的 ρ_k 代入以零件偏心最大允许值 ρ_{\max} 则

$$\sigma_{\max} = 0.291\rho_{\max} \quad (7)$$

由式(7), 为使被加工零件偏心参数 $\rho < \rho_{\max}$, 我们就得调整工艺设备, 控制偏心量 t_i 的分布参数 σ_i , 从而保证分布参数 σ 小于某一数值 σ_{\max} 。

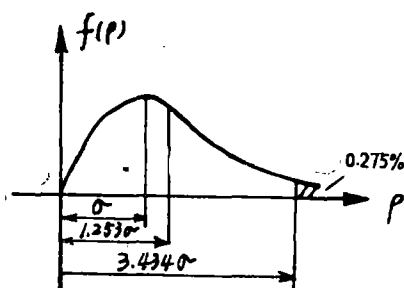


图 2

我们在 σ_{\max} 附近取 σ_0 和 σ_1 , 并作假设 $H_0: \sigma = \sigma_0$, $H_1: \sigma = \sigma_1$, 若允许犯第一类错误的概率为 α , 犯第二类错误的概率为 β , 则对 $H_0: \sigma \leq \sigma_0$ 和 $H_1: \sigma \leq \sigma_1$, 犯第一类错误和犯第二错误的概率不会超过 α 和 $\beta^{[4]}$ 。

假设容量为 m 的取样件来自 $\sigma = \sigma_0$ 的总体, 考虑到抽样的独立性, 其联合分布密度函数

为

$$P_{0m} = \prod_{i=1}^m \frac{\rho_i}{\sigma_0^2} e^{-\rho_i^2/2\sigma_0^2}$$

或者

$$P_{0m} = \frac{1}{\sigma_0^{2m}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^m \rho_i^2} \prod_{i=1}^m \rho_i \quad (8)$$

若样件来自 $\sigma = \sigma_1$ 的总体, 则其联合分布密度函数为

$$P_{1m} = \frac{1}{\sigma_1^{2m}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^m \rho_i^2} \prod_{i=1}^m \rho_i \quad (9)$$

由序贯概率比检验法则^[4], 如果

$$\frac{P_{1m}}{P_{0m}} \geq \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (10)$$

则停止抽样, 认为 $\sigma \geq \sigma_1$; 如果

$$\frac{P_{1m}}{P_{0m}} \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (11)$$

则停止抽样, 认为 $\sigma < \sigma_0$; 如果

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{P_{1m}}{P_{0m}} < \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (12)$$

则继续取样。

把式(8)和式(9)代入式(10)——(12)得:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m \rho_i^2 &\geq \frac{2 \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} + m \frac{2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} && \text{认为 } \sigma \geq \sigma_1 \\ \sum_{i=1}^m \rho_i^2 &\leq \frac{2 \ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} + m \frac{2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} && \text{认为 } \sigma \leq \sigma_0 \\ \frac{2 \ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} + m \frac{2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} &\leq \sum_{i=1}^m \rho_i^2 \leq \frac{2 \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} + m \frac{2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} && \text{继续抽样} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

模型(13)用图 3 表示。

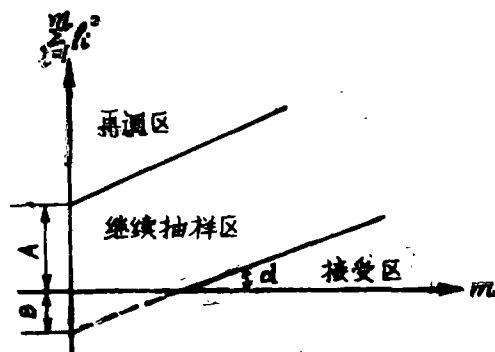


图 3

$$A = 2 \ln \frac{1-\beta}{\alpha} / \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right),$$

$$B = 2 \ln \frac{\beta}{1-\alpha} / \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right),$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left[2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} / \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \right]$$

从图 3 不难看出, 当样件信息平方和落在合格区内时, 我们可停止采样并认为工艺设备已调整好; 当平方和落在再调区内, 我们要重新调整; 当平方和落在继续抽样区时, 我们继续抽样。

生产中, 我们可通过微型机对模型(13)进行电算处理, 其用 FORTRAN-IV-PLUS 语言编写的程序如下:

```

READ(5,10)A1,A2,PM,B
10  FORMAT(4F7.4)
S=0

```

```

M = 0
DX = 0.291*PM
D0 = DX - B
D1 = DX + B
DX = 1.0/D0**2 - 1.0/D1**2
A = 2*ALOG(D1**2/D0**2)
15  READ(5,20)P
20  FORMAT(F7.4)
M = M + 1
S = P**2 + S
W = 2*ALOG((1 - A2)/A1)/DX + M*A/DX
Z = 2*ALOG(A2/(1 - A1))/DX + M*A/DX
IF(S.GE.W)GOTO25
IF(S.LE.Z)GOTO35
WRITE(5,30)
30  FORMAT(5X,'CONTINUE SAMPLING! ')
GOTO15
25  WRITE(5,40)
40  FORMAT(5X,'PLEASE READJUST! ')
GOTO 100
35  WRITE(5,50)
50  FORMAT(5X,'ADJUST VERY WELL! ')
100 STOP
END

```

程序中主要变量的含义:

A1: α ; A2: β ; PM: 允许最大偏心量, B: $(\sigma_1 - \sigma_0)/2$

二、不等壁分布工艺参数调整数学模型

精密机械加工中另一类常见的非正态分布为不等壁分布, 这类分布实际上是服从于正态分布的尺寸参数代数差的绝对值分布。具有对称轴或对称平面的两个表面的不对称性, 两轴线的不平行度以及不等壁厚度误差等都服从于这种分布^[2]。

若 X_1, X_2 为两个独立正态分布随机变量, 则 $\gamma = |X_1 - X_2|$ 服从不等壁分布。令 $\rho = \gamma/\sigma_0$, 则随机变量 ρ 的分布密度函数为

$$f(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho-\rho_0)^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho+\rho_0)^2}{2}} \quad (14)$$

其中 $\rho_0 = E(\rho) - \frac{E(\gamma)}{\sigma_0}$ 表示 ρ 的数学期望。 σ_0 为 X_1 和 X_2 的标准差。

如图4, $\phi(\rho - \rho_0)$ 和 $\phi(\rho + \rho_0)$ 分别表示式(14)的前后两项, 它们的和即为 $f(\rho)$. 由于 $\rho > 0$, 故当 $\rho_0 > 3$ 时 $\phi(\rho + \rho_0) \approx 0$, 这时 ρ 所服的分布为正态分布, 其工艺设备调整模型已在文献[1]中论述. 这里我们就 $\rho_0 < 3$ 的情况进行讨论.

假设 ρ 的容许危率为 0.275% (图4), 我们可作满足

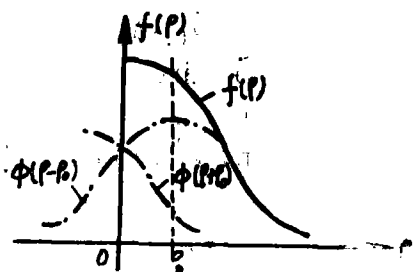


图 4

当 $0 \leq \rho_0 \leq 3$ 时, $\phi(\rho - \rho_0)$ 和 $\phi(\rho + \rho_0)$ 为正态分布的原始曲线, $f(\rho)$ 为不等壁分布.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\rho_{\max}}^{\infty} \left(e^{-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4}} + e^{-\frac{(\rho + \rho_0)^2}{2}} \right) d\rho$$

$= 0.275\%$ 的 “ $\rho_0 - \rho_{\max}$ ” 曲线. 当工件尺寸参数的最大允许值 ρ_{\max} 给定时, 由曲线可以得到 ρ_0 的最大允许值. 我们以 ρ_0 为对称中心, 取一小区间 $[\rho_1, \rho_2]$, 其大小由工艺条件决定.

记 $H_0: E(\rho) = \rho_1$, $H_1: E(\rho) = \rho_2$, 如果犯第一类错误的概率为 β , 则我们可通过序贯概率比检验法则^[4]来判别工艺设备是否调整好.

假设样件容量为 m , 它来自 $E(\rho) = \rho_1$ 的总体, 考虑到抽样的独立性, 则其联合分布密度函数为

$$P_{om} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho_i - \rho_1)^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho_i + \rho_1)^2}{2}} \right)$$

或者

$$P_{om} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^m \left(e^{-\frac{1}{2}(\rho_i^2 + \rho_1^2)} \operatorname{ch} \rho_i \rho_1 \right) \quad (15)$$

同理, 若样件来自 $E(\rho) = \rho_2$ 的总体, 则其概率密度函数为

$$P_{1m} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^m \left(e^{-\frac{1}{2}(\rho_i^2 + \rho_2^2)} \operatorname{ch} \rho_i \rho_2 \right) \quad (16)$$

把式(15)、(16)代入式(10)–(12)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2)m + \sum_{i=1}^m \ln \operatorname{ch} \rho_2 \rho_i - \sum_{i=1}^m \ln \operatorname{ch} \rho_1 \rho_i &\geq \ln \frac{1-\beta}{\alpha} && \text{接受 } \rho \leq \rho_2 \\ \frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2)m + \sum_{i=1}^m \ln \operatorname{ch} \rho_2 \rho_i - \sum_{i=1}^m \ln \operatorname{ch} \rho_1 \rho_i &\leq \ln \frac{\beta}{1-\alpha} && \text{接受 } \rho \leq \rho_1 \\ \ln \frac{1-\beta}{\alpha} > \frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2)m + \sum_{i=1}^m (\ln \operatorname{ch} \rho_2 \rho_i - \ln \operatorname{ch} \rho_1 \rho_i) &> \ln \frac{\beta}{1-\alpha} && \text{继续抽样} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

类似文献[1], 我们也可分别对 $|\rho_1 \rho_i|$, $|\rho_2 \rho_i|$ 大于及小于 3 的情况进行讨论, 不过其计算工作量较大. 这里我们编制了 FORTRAN 程序, 使用时可把程序存入磁盘, 从而由微型机电算判别工艺设备是否调整好.

```
      READ(5,10)A1,A2,PM,B
10      FORMAT(4F7.4)
      M = 0
      S = 0.0
      P1 = PM - B
      P2 = PM + B
      A = (P1**2 - P2**2)/2.0
15      READ(5,20)P
20      FORMAT(F7.4)
      M = M + 1
      S = S + ALOG(COSH(P2*P)) - ALOG(COSH(P1*P))
      U = ALOG((1 - A2)/A1) - M*A
      V = ALOG(A2/(1 - A1)) - M*A
      IF(S.GE.U)GOTO25
      IF(S.LE.V)GOTO35
      WRITE(5,30)
30      FORMAT(5X,"CONTINUE SAMPLING! ")
      GOTO15
25      WRITE(5,40)
40      FORMAT(5X,"PLEASE READJUST! ")
      GOTO100
35      WRITE(5,50)
50      FORMAT(5X,"ADJUST VERY WELL! ")
100     STOP
      END
```

三、结 束 语

1940年苏联莫斯科鲍曼工学院 А.Б.Жукин 教授提出的工艺设备调整方法,仅适用于正态分布。对于非正态分布工艺设备调整只能粗略估计,本文应用微型计算机,把精密机械加工中常见的两种非正态分布,即偏心分布和不等壁分布,应用序贯分析方法建立数学模型,无疑这将会对 CAM 起良好作用。

参 考 文 献

- [1] 陈希达、陈宝珊, 工艺设备调整数学模型, 华侨大学学报, 6, 3 (1985).
- [2] А.К.Кутай, Х.Б.Кордонский, Анализ Точности и Контроль Качества В Машиностроении, Машгиз, (1958).
- [3] Х, Б, Кордонский, Приложения Теории Вероятностей в Инженерном Деле, Физматгиз, (1963).
- [4] A. Wald, Sequential Analysis, John Wiley, (1947).
- [5] 李纯甫, 尺寸链中偏心误差的理论计算, 东北工学院学报, (1963).

The Mathematical models for the Adjustment of Some Non-Gaussian Distribution Technological Installations

Chen Xida Chen Baoshan

Abstract

The current paper is a continuation followed the related paper published in the previous issue. Basing on the principle of sequential analysis, this paper presents two mathematical models, the model of eccentric distribution and the model of difference module distribution. The programs corresponding to the models are proved to be feasible in PDP-11/34 computer.