

钢筋混凝土构件有限元弹塑性分析(I)

钢筋混凝土柱的非线性分析

陈忠汉

(土木工程系)

摘 要

本文把钢筋混凝土柱的变形分析归结为平面应力问题,采用有限单元方法通过编制程序由数值分析求解。在实例分析中计入材料非线性、多轴应力效应以及在开裂后的残余抗拉作用。并讨论了矩形单元的剪应变修正问题和基于试验资料而提出的简单分析方法。

一、前 言

地震时地面水平运动,使房屋的钢筋混凝土柱横向受力,由于塑性变形的集中,往往在柱端引起破坏,由此而导致结构物倒塌的震害实例是很突出的。为了研究柱子在横向受力时的变形状况与破坏机理,国内外学者对理论分析与试验研究做了大量的工作^[1-5],目前认为压弯构件的受力状态能较好地反映柱在横向力作用下的受力、变形情况。

本文对压弯构件单调加载全过程弹塑性分析的二维分析方法进行了研究,分析中考虑了混凝土的多轴应力状态、裂缝间混凝土的抗拉作用以及材料非线性的影响。本文根据试验显示的压弯构件受力变形特征,提出了简化分析过程的实用方法,并讨论了矩形单元的剪应变修正问题。

二、理论分析

国内近年来用有限元法研究钢筋混凝土构件,尤其是抗剪等问题方面,取得了一定成果^[6,7]。钢筋混凝土结构构件的数值分析,涉及许多尚未妥善解决的混凝土基本理论问题,而且有限元法本身也须不断改进。因此,钢筋混凝土构件的有限元分析方法,尤其是考虑较多因素的弹塑性分析还处于探索阶段。

1、单元选择与基本原理

有限元法的离散化过程中,单元形式的选择直接影响计算的精度和工作量。本文采用精

本文1986年1月9日收到。

度较高的四结点矩形单元,单元内部应力呈线性变化,与三角形单元相比较,可在相同结点数情况下更精确地反映其应力和应变分布。单元内部位移模式如下:

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\ V &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, u_i 、 v_i 分别为结点 i 在 x 、 y 方向的变位, N_i 为相应的形函数,是局部坐标值 ξ 、 η 的函数。

由最小势能原理可求得单元刚度矩阵

$$[k]_e = \iiint_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (2)$$

因式中被积函数与单元内应力、应变分布有关,无法直接积分求解单元刚度矩阵的显式。本文采用的高斯求积法与其它方法相比具有较高的精度,如忽略厚度 t 方向的变化,式(2)简化为二维形式:

$$[k]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \cdot t \quad (3)$$

若每单元四个积分点,高斯求积式如下:

$$[k]_e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 H_i H_j [B]_{i,j}^T [D] [B]_{i,j} |J| \cdot t \quad (4)$$

式中, $|J|$ 为雅可比行列式; H_i 、 H_j 为加权系数。

基于分段线性化的假设,总刚度矩阵仍可由相应的单元刚度迭加而成。

最后可通过以下关系式求得各结点位移,及相应的应变、应力值:

$$\left. \begin{aligned} \{\delta\} &= [k]^{-1} \{p\} \\ \{\varepsilon\} &= [B] \{\delta\} \\ \{\sigma\} &= [D] [B] \{\delta\} = [D] \{\varepsilon\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

计算表明,只要适当描述材料的非线性和砼的开裂、粘结力等现象,结果是满意的。然而,矩形单元积分点的剪应力精度较差,有波动情况,这是因为弯曲变形要求的单元边界弯曲,在等参低阶单元中无法反映。应该弯曲的边界仍按直线处理,相当于附加了一个剪力,而使单元剪应力失真。目前常用的方法是采用高阶位移模式的等参单元或 Wilson 的不协调四边形单元,但都要化费较多的机时,这对于要求多次迭代的非线性分析尤为突出。

本文提出分块修正方法,取得较好效果。其主要原理如下:设某单元在弯矩剪力作用下(图1(b))两侧边界的平均相对转角为: $\alpha_{e1} = (\theta_1 + \theta_2)/2$,并按中线把单元分成左(L_e)右

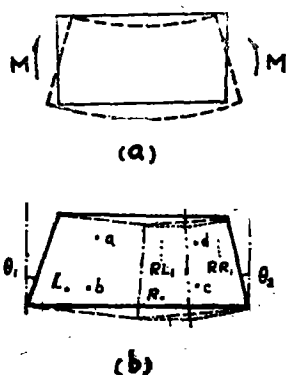


图1 分块修正法示意图
a, b, c, d'为积分点

(R_+)两块。由图可见, L_+ 块的附加剪应变为 $\left(+\frac{\alpha_{e1}}{2}\right)$, 而 R_+ 块则为 $\left(-\frac{\alpha_{e1}}{2}\right)$ 。若积分点

刚好在 L_+ 或 R_+ 块中线位置上, 则修正值应为 $r_m = \pm \frac{\alpha_{e1}}{2}$; 但积分点不在中线位置时, 须

继续再分块: LL_1, LR_1, \dots 直到积分点充分接近小分块的中线位置。这时, 总修正量为:

$$r_m = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i \alpha_{ei}, \text{ 其中 } n \text{ 为总的分块次数, } |\alpha_{ei}| \text{ 为第 } i \text{ 级分块的修正量 (或附加剪应变),}$$

并且 $|\alpha_{ei}| = \frac{1}{2} |\alpha_{e(i-1)}|$, α_{ei} 正负号由积分点相应于某分块中线的位置而定。

2、材料非线性性能

在数值分析中考虑混凝土材料的非线性, 用于分析的应力-应变曲线大致可分为二类, 有拟合关系曲线或据模型得出的关系式。本文采用文献[8]关系式。试验表明, 双向受压状态下二个主应力方向的应力-应变关系是不相同的, 同时又分别异于各自在单向受力下的情况。这是由于泊桑比和微裂缝受约束的影响。

若假定混凝土为各向异性材料, 并在各级荷载增量内应力-应变为线弹性关系, 则可求得以下应力表达式:

$$\sigma_i = \frac{E_0 \varepsilon_i}{(1 - \nu \alpha_i) \left[1 + \left(\frac{1}{1 - \nu \alpha_i} \cdot \frac{E_0}{E_s} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ic}} \right) + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ic}} \right)^2 \right]} \quad (6)$$

式中, E_0 为初始刚度; $E_s = \sigma_{ic} / \varepsilon_{ic}$ (最大应力与相应应变之比); α_i 为垂直于 i 方向的主应力与 i 方向主应力之比。

根据式(6)可通过求导得出其切线模量值:

$$E_i = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{E_0 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ic}} \right)^2 \right]}{(1 - \nu \alpha_i) \left[1 + \left(\frac{1}{1 - \nu \alpha_i} \cdot \frac{E_0}{E_s} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ic}} \right) + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{ic}} \right)^2 \right]^2} \quad (7)$$

为避免重复考虑泊桑比的影响, 在应变增量与应力增量的矩阵关系式中用 E'_i 代替 E_i :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' \frac{E'_1}{E'_2} & \lambda' \nu & 0 \\ \lambda' \nu & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E'_1 E'_2}{E'_1 + E'_2 + 2E'_2 \nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中

$$\lambda' = \frac{E'_1}{E'_1 - \nu^2}, \quad E'_i = E_i (1 - \alpha_i \nu) \quad (i = 1, 2)$$

关于 ν 的取值, 试验值在 0.14~0.25 范围内, 低于 80% 的极限荷载时, ν 在 0.2 左右。

以后 ν 值迅速增加。为简化起见, ν 取定值 0.20。

在压-拉区域, E'_1 取 E_0 , E'_2 取单向受压时的切线模量。在拉-拉区域, 取 E'_1 、 E'_2 均

等于 E_0 。

如上所述, 由于泊桑比及约束微裂缝的影响, 混凝土两向受力时, 极限应力值 σ_{ic} 随 α_i 以及 f_c' (单轴极限应力值) 而变化。破坏条件的相应表达式也很多, 有基于试验以及理论分析二类^[8-14], 本文采用以下较接近实测值的表达式:

$$F[\sigma] = \alpha J_1 + \sqrt{J_2'} - k = 0 \quad (9)$$

式中, J_1 为应力第一不变量; J_2' 为应力偏量第二不变量; α 取 0.07, k 取 $0.507|f_c'|$ 时与试验结果吻合较好, 即

$$0.07J_1 + \sqrt{J_2'} = 0.507|f_c'| \quad (10)$$

对于平面应力问题, 可推导得其压-压区域对应不同应力比 α_i 的极限应力:

$$\sigma_{ic} = 0.507|f_c'| / \{0.07(\alpha_i + 1) + (\sqrt{6})^{-1}[(\alpha_i - 1)^2 + \alpha_i^2 + 1]^2\} \quad (11)$$

在拉-压区域与拉-拉区域, 均以 f_t' 为破坏条件 (图 2), 单轴受拉强度 f_t' 的测量值在 $0.02-0.1|f_c'|$ 范围内, 本文取 $f_t' = 0.64\sqrt{f_c'}$ (或 $f_t' = 0.58\sqrt{R^2}$)。

在压-压区域达到破坏条件后, $[D]$ 变为零矩阵; 在拉-压、拉-拉区域达到破坏条件后, 则认为单元开裂, 最大主拉应力方向的 $E_i = 0$, 即 $\sigma_i = 0$, 另一方向按单向受力状态处理。

本文分析中采用钢筋-混凝土组合单元, 并考虑由粘结而产生的裂缝间混凝土的残余拉应力: 由试验结果分析可知, 钢筋砼构件中混凝土在开裂后主拉应力方向的拉应力并未完全丧失, 钢筋通过粘结力使周围混凝土仍承受一定的拉力。本文分析中, 在单元开裂后仍取混凝土 E_i 为 0, 而是在钢筋应力中加上一个附加增量, 以此反映裂缝间混凝土的抗拉作用:

$$\sigma_i' = \sigma_i + \frac{k_1 k_2 f_t'}{p} \quad (12)$$

式中, σ_i 为原钢筋应力; p 为配筋率。

$$k_1 k_2 = \frac{1}{4.5 \times 10^3 \cdot \varepsilon_c + 0.84} + 0.22 \leq 1$$

在压弯构件中, 由于剪应力的存在, 混凝土主拉应力方向与钢筋轴线往往是斜交的, 这时 σ_i'' 如下:

$$\sigma_i'' = \sigma_i + k_1 k_2 \frac{f_t' \cos^2 \theta}{p} \quad (13)$$

式中, θ 为主拉应力方向与纵向轴线的交角, 如图 3 所示。

钢筋的应力-应变关系如图 4 所示。假设为考虑强化影响的理想弹塑性材料。

3、非线性问题的数值分析方法

有限元法求解非线性问题在计算原理上已基本解决。本文采用混合法, 荷载分级施加, 在各级荷载中采用变刚度法, 以处理混凝土开裂、破碎以及钢筋屈服等因素引起的不平衡

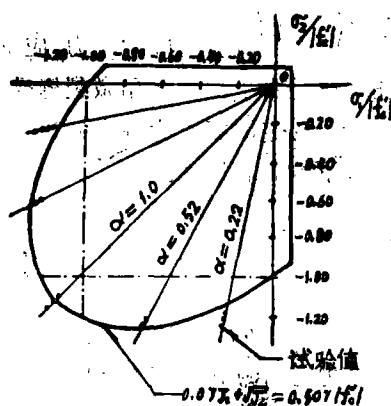


图 2 双向受力混凝土的强度

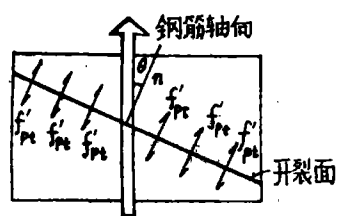


图 3

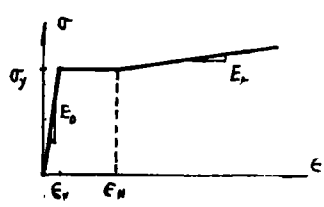


图 4 钢筋应力-应变关系曲线

力, 加快收敛速度。收敛由位移增量来控制:

$$\frac{\left| \sqrt{\sum_i^n (\delta_i^n)^2} - \sqrt{\sum_i^n (\delta_i^{n-1})^2} \right|}{\sqrt{\sum_i^n (\delta_i')^2}} \times 100 \leq \xi \quad (14)$$

式中, δ_i^n 为 i 节点自由度方向 n 次位移值。

若上式能满足, 即可转入第 $(n+1)$ 级荷载增量的计算。计算表明, ξ 值可在 1.0~2.0 内取值, 具体计算次序可参见数值分析源程序框图 (图 5)。

三、实例简化分析

本文用自编的电算程序分析了钢筋混凝土压弯构件, 基本数据如表 1 所示^[5]。

表 1

试件编号	b × h (cm)	R _g (MPa)	R (MPa)	μ _g (%)	轴压比 N/N ₀	箍筋 间距 (cm)
PA-16-L1	16.6 × 15.9	381.5	48.1	1.47	0.05	φ6 6.0

现将简化的网格划分方法及计算结果讨论如下:

1、简化的网格划分方法

有限元法用于钢筋混凝土的非线性分析, 除了确定合适数学模型外, 程序分析的实现往往要求较多的内存和计算机时, 这对于用小型机进行的非线性数值分析更为突出。

本文结合试验, 利用此类构件变形集中的特点, 经过适当处理, 用较少的单元区域来分析整个构件的受力变形状态。资料分析^[5]表明压弯构件的变形大部分集中于中部塑性铰区, 变形开裂情况比较复杂的也在这一区域, 这是数值分析的主要目标。其它部分都处于屈服前的低应力阶段, 其力-变形关系可由铰区在低应力阶段的力-变形关系相当精确地表示。综上所述, 并利用构件的对称性, 用于实际分析的网格划分如图 6 所示。为避免分析部分的整体平动而引起解的发散, 在左端虚设一竖向位移约束连杆。实际分析中, 在左端各节点施加节点力 P_{Ht} 、 P_{Vt} , 以反映构件中该截面承受的弯矩 (M^k)、剪力 (Q^k) 及轴力 (N^k), 单元节点力与截面内力的关系如下:

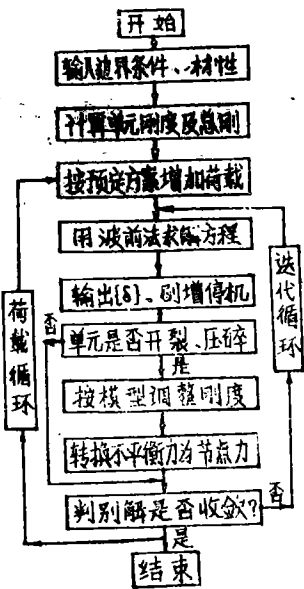


图 5 源程序框图

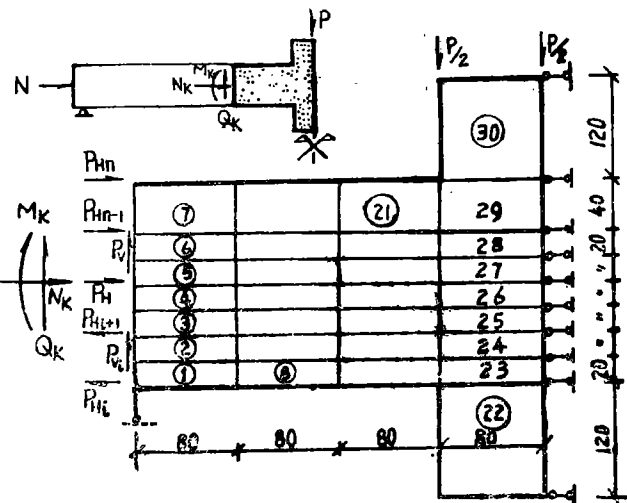


图 6 单元网格划分图

2、计算分析及结果比较

(1) 位移分析与极限荷载分析:

简化区段求解得出的位移值, 只代表塑性铰区的相对位移值, 其余部分的位移无法直接求出。但调用简化区段分析中建立的 $\varphi_i = \Phi(M_i)$ 关系 (即 $M-\varphi$ 关系) 整个构件位移值 是不难求解的 (图 7)。

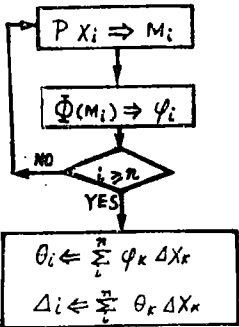


图 7 位移子程序

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^l P_{Hi} &= N^k \\ \sum_{i=1}^l P_{Hi} h_i &= M^k \\ \sum_{i=1}^l P_{ri} &= Q^k \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

为消除节点力局部作用的影响, 分析中增设一列过渡单元①—⑦, 只作为传递内力。由此, 可使单元数减为原来的三分之一左右 (如计入对称性则为六分之一), 大大减少了计算工作量, 而且分析结果是可称满意的。

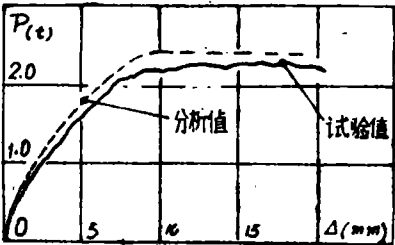


图 8 P-△曲线的试验与分析比较

图 8 反映的分析值与实测结果的比较表明, 这一简化方法是与试验基本吻合的。简化区段是构件最大应力区段, 因此计算得出的简化区段的极限荷载即为整个构件的极限承载能力, 图 8 表示的极限荷载值是接近的。

(2) 构件开裂形式:

二维分析较一维分析突出的改进之一, 就是前者对开裂方向的分析更接近于实际情况, 而一维分析中裂缝始终垂直于单元轴线方向。二维分析结果显示的裂缝开展如图 9 所示, 由图可见, 裂缝开展方向与试验结果 (图中粗线) 大致相近, 但开裂成片、方向变化未体现混凝土材料的不均匀性, 而显得过于平滑。这是有待于进一步探讨的课题。

四、结 论

1. 本文初步讨论了用有限元法研究钢筋混凝土柱弹塑性性能的数值分析方法。在一次分析中可得到大量的数据, 这对从理论上研究柱端塑性铰区的变形、延性很有帮助, 可代替大量昂贵费时的试验工作。

2. 本文提出的分块修正法简单有效, 基本消除了剪应力异常的现象, 使计算结果更趋合理。

3. 本文采用的简化分析方法, 理论上是正确的, 节省机时, 与试验结果符合良好。

4. 数值分析中有待于进一步探讨的是如何更好反映构件开裂形式的问题: 实际试验的裂缝呈不规则的条状, 而目前有限元分析通常得出成片的, 光滑过渡的开裂区。

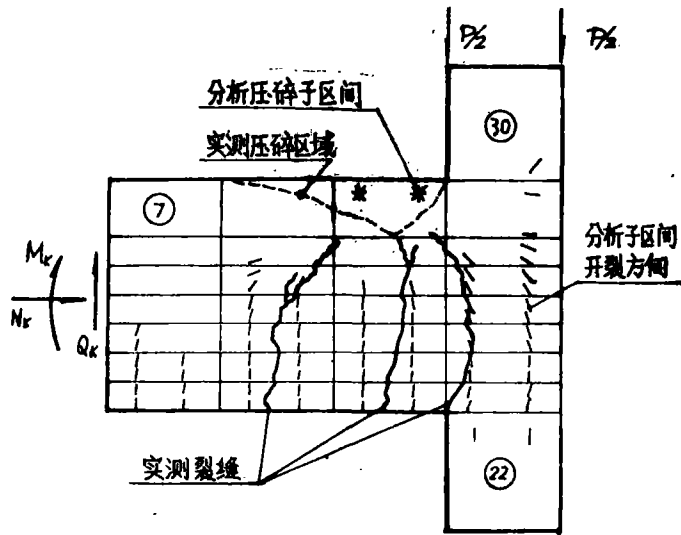


图9 裂缝开展示意图

参 考 文 献

- [1] S. K. Ghosh, M. Z. Cohn, Ductility of Reinforced Concrete Sections in Combined Bending and Axial Load, Symposium on Inelasticity and Non-Linearity in structural concrete. (1972).
- [2] L. Lachance, Stress Distribution in Reinforced Concrete Section Subjected to Biaxial Loading, ACI Journal, 4/5 (1980).
- [3] 朱伯龙、吴明舜, 钢筋混凝土受弯构件延性系数的研究, 同济大学学报, 1 (1978).
- [4] 坂静雄、山田稔, 鉄筋コンクリート、ブラッケーヒンジの回転限界, 日本建筑学会论文报告集, 58 (1958).
- [5] 陈忠汉, 朱伯龙, 鈕宏, 斜向受力钢筋混凝土压弯构件的非线性分析, 土木工程学报, 4 (1984).
- [6] 董振祥, 颜德姐, 用有限元法研究钢筋混凝土梁抗剪的非线性性能, 同济大学学报, 4 (1981).
- [7] 瞿伟廉, 钢筋混凝土墙板非线性分析, 土木工程学报, 2 (1983).
- [8] T. C. Y. Liu, A. H. Nilson and F. O. Slate, Biaxial Stress-Strain Relations for Concrete, Proc. ASCE, ST5, 5 (1972).
- [9] H. Kupfer and K. H. Gerstle, Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, ASCE Engineering Mechanics Division, 5 (1972).

- [10] M. E. Tasuji, F. O. Slate and A. H. Nilson, Stress-Strain Response and Fracture of Concrete, Journal of ACI, 7 (1978).
- [11] M. E. Tasuji, A. H. Nilson and F. O. Slate, Biaxial Stress-Strain Relationships for Concrete, Magazine of Concrete Research, 12 (1979).
- [12] H. Kupfer, H. K. Hilsdorf and H. Rusch, Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, Journal of ACI, 8 (1969).
- [13] D. C. Drucker and W. Prager, Soil Mechanics and Plastic Analysis for limit Design, Quarterly of Applied Mechanics, 7 (1952).
- [14] 野口博,有限要素法による鉄筋コンクリートの非線形解析,日本建築学会論文報告集, 260(1977).

Finite Element Analysis of R.C. Members (I)

Nonlinear Analysis of R.C. Columns

Chen Zhonghan

Abstract

In this paper, the deformation analysis of R. C. columns is attributed to a problem of plane stress. A computer program on the basis of finite element method is worked out to find a numerical solution. The nonlinearity of materials, the biaxial stress effect, as well as the residual tension of concrete after cracking, are all taken into account in the practical analysis.

This paper discusses also the shear strain modification of rectangular elements as well as a simple analytic method based on data from experiments.