

随机序列的平稳区间预报与 适时区间预报是渐近相同

陈 建 伟

(应用数学系)

摘 要

本文概述了随机序列的平稳区间预报法和适时区间预报法,论证了平稳区间预报法和适时区间预报是渐近相同,揭示了这二种区间预报的内在联系。

一、引 言

在时域分析中,主要包括有二方面的工作,其一是建立合理的数学模型来拟合被测量到的数据;其二是从建立的数学模型出发,对未来时刻的规律作出预报。BOX^[1]提出了用ApmA(p, g)模型来描述平稳时间序列的方法,给出了具体的建模步骤。对于预报问题,通常采用的是ARMA(p, g)序列的平稳预报法,此方法较精确,但需要的历史数据要有无穷,因而在实用中有很大的局限性。1981年科学院杜金观等提出了用适时的方法来做预报,克服了平稳预报法的缺陷。文献^[3]在此基础上给出了适时区间预报,按概率的观点来考察预报趋势,确定了所要预报的真值的概率范围,这种区间预报更有实用性。本文论述平稳区间预报法,就是上面提到的ARMA(p, g)序列的平稳预报法。证明了适时区间预报和平稳区间预报是渐近相同的,揭示了这二种区间预报的内在联系。

二、证 明 过 程

设随机时间序列 $\dots, w_1, w_2, \dots, w_N, \dots$ 是宽平稳,零均值的,并满足ARMA(p, g)模型

$$\varphi(B)w_t = Q(B)a_t, \quad (1)$$

其中 \dots, a_1, a_2, \dots 为白噪声过程。

$$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p,$$

$$Q(B) = 1 - o_1 B - o_2 B^2 - \dots - o_g B^g$$

是推移算子 B 的多项式,且零点都在单位圆外,模型(1)的传递形式和逆转形式分别为:

本文1985年7月11日收到。

$$w_k = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{k-j}; \quad a_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j w_{k-j}, \quad (2)$$

其中 $G_j, \pi_j (j=0, 1, 2, \dots)$ 分别是模型(1)的格林函数和逆函数。并记

$$\Delta_N = \left\{ \sum_{j=1}^n C_j w_j; C_j \text{ 为实数} \right\}.$$

$$W_N = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} b_j w_{N-j}; b_j \text{ 为实数, 且 } \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 < \infty \right\}.$$

显然 Δ_N 与 W_N 都是完备化空间, 且 $\Delta_N \subset W_N$.

用 $w_N(l)$ 表示由历史数据 w_N, w_{N-1}, \dots 对时刻 $(n+l)$ 的序列值所作的线性最小方差预报, 即

$$w_N(l) \stackrel{\Delta}{=} E(w_{N+l} / w_N, w_{N-1}, \dots) = \hat{E}(w_{N+l} / W_N) \quad (3)$$

用 $w_{N+l, N}$ 表示由历史数据 w_N, \dots, w_1 对时刻 $(n+l)$ 的序列值所作的线性最小方差预报, 即

$$w_{N+l, N} \stackrel{\Delta}{=} \hat{E}(w_{N+l} / w_N, \dots, w_1) = \hat{E}(w_{N+l} / \Delta_N), \quad (4)$$

则 $w_N(l)$ 是 W_N 上的 l 步平稳预报, $w_{N+l, N}$ 是 Δ_N 上的 l 步适时预报, 其中 \hat{E} 是线性投影符号。

记二种预报的 N 时刻的 l 步预报误差为

$$e_N(l) = w_{N+l} - w_N(l); \quad \varepsilon_N(l) = w_{N+l} - w_{N+l, N}, \quad n.$$

统计量

$$T_1(l) = \frac{w_{N+l} - w_N(l)}{\sqrt{E[e_N(l)]^2}}$$

服从 $N(0, 1)$ 正态分布

由此得到水平为 $(1-\delta)$ 的平稳 l 步预报区间

$$P\left(L_{\frac{\delta}{2}}^{(1)}(l) \leq w_{N+l} \leq L_{\frac{\delta}{2}}^{(1)}(l)\right) = 1 - \delta$$

其中

$$L_{\frac{\delta}{2}}^{(1)}(l) = w_N(l) - x_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{E[e_N(l)]^2},$$

$$L_{\frac{\delta}{2}}^{(1)}(l) = w_N(l) + x_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{E[e_N(l)]^2}.$$

分别为平稳区间预报的上、下限, 按下面所述的引理1, $Ee_N(l)$ 为已知。

由式(3)可得水平为 $(1-\delta)$ 的适时 l 步预报区间

$$P\left(L_{\frac{\delta}{2}}^{(2)}(l) \leq w_{N+l} \leq L_{\frac{\delta}{2}}^{(2)}(l)\right) = 1 - \delta$$

其中

$$L_{\downarrow}^{(2)}(l) = \hat{w}_{N+l}, \quad n - x_2 \sqrt{E[\varepsilon_N(l)]^2}$$

$$L_{\uparrow}^{(2)}(l) = \hat{w}_{N+l}, \quad n + x_2 \sqrt{E[\varepsilon_N(l)]^2}$$

分别为适时区间预报的上、下限, x_2 可查倍数为 σ 的正态表。

本文要论证这二种区间预报法在均方意义下是渐近相同的

引理1 在以上条件下, 对任意的正整数 N 及 l , 平稳预报的 l 步预报的误差 $e_N(l)$ 满足

$$E(e_N(l))^2 = \sigma_a^2 (1 + G_1^2 + \cdots + G_{l-1}^2)$$

其中

$$E_{a_k, a_i} = \sigma_a^2 \delta_{k-i}$$

再给出并证明以下几个结论:

引理2 在引理1的条件下, 即有

$$\hat{w}_N(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(l)} w_{N+1-j},$$

其中

$$\begin{cases} \pi_j^{(1)} = \pi_j, & j = 1, 2, \dots \\ \pi_j^{(l)} = \pi_{j+l-1} + \sum_{i=1}^{l-1} \pi_i \pi_j^{(l-i)}, & l = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

π_j 是 $\text{ARMA}(p, g)$ 的逆函数。

证明

\because

$$a_{N+l} = w_{N+l} - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j w_{N+1-j},$$

$$w_{N+l} = a_{N+l} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j w_{N+1-j}$$

因此得

$$\begin{aligned} \hat{w}_N(l) &= \hat{E}(w_{N+l} / W_N) \\ &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j w_{N+1-j}, & l = 1 \\ \sum_{j=1}^{l-1} \pi_j \hat{w}_N(l-j) + \sum_{j=l}^{\infty} \pi_j w_{N+1-j}, & l = 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$

当 $l=1$ 时, 由式(5)得

$$\hat{w}_N(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j w_{N+1-j}$$

取 $\pi_j^{(1)} = \pi_j (j=1, 2, \dots)$ 即得

$$\hat{w}_N(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(1)} w_{N+1-j}$$

假设当 $l \leq n-1$ 时结论成立, 即

$$\hat{w}_N(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(l)} w_{N+1-j}$$

其中

$$\pi_j^{(l)} = \pi_{j+l-1} + \sum_{i=1}^{l-1} \pi_i \pi_j^{(l-i)} \quad j=1, 2, \dots$$

看 $l=n$, 由式(5)得

$$\begin{aligned} \hat{w}_N(n) &= \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j \hat{w}_N(n-j) + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j w_{N+1-j} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j \sum_{r=1}^{\infty} \pi_r^{(n-j)} w_{N+1-r} + \sum_{j=n}^{\infty} \pi_j w_{N+1-j} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j \pi_r^{(n-j)} w_{N+1-r} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j+n-1} w_{N-j+1} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \pi_j \pi_r^{(n-j)} + \pi_{r+n-1} \right] w_{N-r+1} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \pi_r^{(n)} w_{N-r+1} \end{aligned}$$

其中

$$\pi_r^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j \pi_r^{(n-j)} + \pi_{r+n-1} \quad (r=1, 2, \dots, n=2, 3, \dots)$$

证毕.

引理 3 在以上条件下, 对任意自然数 l , $\pi_j^{(l)} (j=1, 2, \dots)$ 是被负指数函数控制

证明 由引理 2 得

$$\begin{cases} \pi_j^{(1)} = \pi_j & (j=1, 2, \dots) \\ \pi_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{l-1} \pi_j^{(l-i)} \pi_i + \pi_{j+l-1} & (l=2, 3, \dots) \end{cases} \quad (6)$$

因为 $\{w_k\}$ 是满足式(1)的宽平稳、零均值序列, 且 $\theta(B)$ 的根全在单位圆外, 那么 π_j 被负指数控制(见文献[2]第116页), 即存在正实常数 g_1, g_2 , 使

$$|\pi_j| < g_2 e^{-g_1 j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

下面固定自然数 j , 对 l 用归纳法. 当 $l=1$ 时, 由式(6)得

$$\pi_j^{(1)} = \pi_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

所以

$$\left| \pi_j^{(1)} \right| < g_2 e^{-g_1 j}$$

即 $\pi_j^{(1)}$ 被负指数控制.

设对 $l \leq n$ 时, $\pi_j^{(l)}$ 被负指数控制, 即存在正实常数 $g_1^{(l)}, g_2^{(l)}$ 使

$$\left| \pi_j^{(l)} \right| < g_2^{(l)} e^{-g_1^{(l)} j}$$

看 $l=n+1$, 由式(6)得

$$\pi_j^{(n+1)} = \sum_{i=1}^n \pi_i \pi_j^{(n+1-i)} + \pi_{j+n}$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \pi_j^{(n+1)} \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \pi_i \right| \cdot \left| \pi_j^{(n+1-i)} \right| + \left| \pi_{j+n} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n g_2 e^{-g_1 i} g_2^{(n+1-i)} e^{-g_1^{(n+1-i)} j} + g_2 e^{-g_1 (n+j)} \\ &\leq \sum_{i=1}^n g_2 g_2^{(n+1-i)} e^{-g_1^{(n+1-i)} j} + g_2 e^{-g_1 j} \end{aligned}$$

取

$$g_1^{(n+1)} = \min \left\{ g_1^{(n+1)-1}, g_1^{(n+1)-2}, \dots, g_1^{(1)}, g_1 \right\}$$

$$g_2^{(n+1)} = \sum_{i=1}^n g_2 g_2^{(n+1-i)} + g_2$$

故得

$$\begin{aligned} \left| \pi_j^{(n+1)} \right| &< \left(\sum_{i=1}^n g_2 g_1^{(n+1-i)} e^{-g_1^{(n+1-i)} j} \right) + g_2 e^{-g_1^{(n+1)} j} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n g_2 g_1^{(n+1-i)} + g_2 \right) e^{-g_1^{(n+1)} j} \\ &= g_2^{(n+1)} e^{-g_1^{(n+1)} j} \end{aligned}$$

从而得 $\pi_j^{(n+1)}$ 被负指数所控制. 由数学归纳法得: 对任意自然 l , $\pi_j^{(l)} (j=1, 2, \dots)$ 被负指数控制.

定理 设 w_+ 是满足 ARMA(p, g) 模型, 即满足式(1), 其中 a_k 为白噪声过程, 且 π_j 被负指数控制, 则

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & l \cdot i \cdot m_{N \rightarrow \infty} (\dot{w}_N(l) - \dot{w}_{N+l, N}) = 0 \\
 (ii) \quad & l \cdot i \cdot m_{N \rightarrow \infty} \left(L_{\perp}^{(1)}(l) - L_{\perp}^{(2)}(l) \right) = 0 \quad l = 1, 2, \dots \\
 (iii) \quad & l \cdot i \cdot m_{N \rightarrow \infty} \left(L_{\downarrow}^{(1)}(l) - L_{\downarrow}^{(2)}(l) \right) = 0
 \end{aligned}$$

其中, $l \cdot i \cdot m$ 表示均方极限记号, 其余符号与前面一样.

证明 对任意给定的正整数 N 及 l , 由于 $\Delta_N \subset W_N$, 所以

$$\begin{aligned}
 E [e_N(l)]^2 &= E [w_{N+l} - \dot{w}_N(l)]^2 \\
 &\leq E (w_{N+l} - \dot{w}_{N+l, N})^2 \\
 &\leq E \left(w_{N+l} - \sum_{j=1}^N \pi_j^{(i)} w_{N-j+1} \right)^2 \\
 &= E \left(e_N(l) + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(i)} w_{N-j+1} - \sum_{j=1}^N \pi_j^{(i)} w_{N-j+1} \right)^2 \\
 &= E [e_N(l)]^2 + 2E \left[(a_{N+l} + G_1 a_{N+l-1} + \dots + G_{l-1} a_{N+1}) \sum_{j=N+1}^{\infty} \pi_j^{(i)} w_{N-j+1} \right] \\
 &\quad + E \left[\sum_{j=N+1}^{\infty} \pi_j^{(i)} w_{N-j+1} \right]^2 \\
 &= E [e_N(l)]^2 + E \left[\sum_{j=N+1}^{\infty} \pi_j^{(i)} w_{N-j+1} \right]^2 \quad (\because E a_i w_j = 0, i > j)
 \end{aligned}$$

由引理 3 得 $\pi_j^{(i)}$ 是被负指数所控制, 所以

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \pi_j^{(i)} w_{N-j+1} \right)^2 = 0$$

从而得

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} E [e_N(l)]^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} E (w_{N+l} - \dot{w}_{N+l, N})^2 \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} E [\varepsilon_N(l)]^2 \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &E (e_N(l) \varepsilon_N(l)) \\
 &= E \left[(a_{N+l} + G_1 a_{N+l-1} + \dots + G_{l-1} a_{N+1}) (w_{N+l} - \sum_{i=1}^N C_i w_i) \right] \\
 &= E \left[(a_{N+l} + G_1 a_{N+l-1} + \dots + G_{l-1} a_{N+1}) w_{N+l} \right] \\
 &= E \left[\sum_{i=0}^{l-1} G_i a_{N+l-i} \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{N+l-j} \right] \quad (\because G_0 = 1) \\
 &= E \left[\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{\infty} G_i G_j a_{N+l-i} a_{N+l-j} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{\infty} G_i G_j E [a_{N+1-i} a_{N+1-j}] \\
 &= \sum_{i=0}^{l-1} G_i^2 \sigma_a^2 \\
 &= E(e_N(l))^2
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 E [e_N(l) - \varepsilon_N(l)]^2 &= E(e_N(l))^2 + E(\varepsilon_N(l))^2 - 2E [e_N(l)\varepsilon_N(l)] \\
 &= E(\varepsilon_N(l))^2 - E(e_N(l))^2
 \end{aligned}$$

由式(7)得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E [e_N(l) - \varepsilon_N(l)]^2 = 0 \quad (8)$$

又由于

$$\begin{aligned}
 &E [\hat{w}_N(l) - \hat{w}_{N+1, N}]^2 \\
 &= E [\hat{E}(w_{N+1}/W_N) - \hat{E}(w_{N+1}/\Delta_N)]^2 \\
 &= E [\hat{E}(w_{N+1}/W_N) - w_{N+1} - \hat{E}(w_{N+1}/\Delta_N) + w_{N+1}]^2 \\
 &= E [e_N(l) - \varepsilon_N(l)]^2
 \end{aligned}$$

利用式(8)可得

$$\begin{aligned}
 &l \cdot i \cdot m_{N \rightarrow \infty} (\hat{w}_N(l) - \hat{w}_{N+1, N})^2 \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} E [\hat{w}_N(l) - \hat{w}_{N+1, N}]^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

因此式(1)得证

$$(L_{\perp}^{(1)}(l) - L_{\perp}^{(2)}(l)) = (\hat{w}_N(l) - \hat{w}_{N+1, N}) - x_2 [E(e_N(l))^2 - E(\varepsilon_N(l))^2]$$

由式(7)得

$$\begin{aligned}
 &l \cdot i \cdot m_{N \rightarrow \infty} (L_{\perp}^{(1)}(l) - L_{\perp}^{(2)}(l)) = \lim_{N \rightarrow \infty} [L_{\perp}^{(1)}(l) - L_{\perp}^{(2)}(l)]^2 \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[(\hat{w}_N(l) - \hat{w}_{N+1, N}) - x_2 (E(e_N(l))^2 - E(\varepsilon_N(l))^2) \right]^2 \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} E [\hat{w}_N(l) - \hat{w}_{N+1, N}]^2 + x_2^2 \lim_{N \rightarrow \infty} E [E(e_N(l))^2 - E(\varepsilon_N(l))^2]^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

同理证得

$$l \cdot i \cdot m_{N \rightarrow \infty} (L_{\perp}^{(1)}(l) - L_{\perp}^{(2)}(l)) = 0$$

故结论得证。

由定理可得, 在相同的信度下, 当 N 足够大时, 这二种区间预报是渐近相同的。

取

$$L_{\pm}^{(3)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^N C_{N+l, j\epsilon_j \pm x_0} \left[\sigma_a^2 (1 + G_1^2 + \dots + G_{l-1}^2) \right]^{\frac{1}{2}}, & N+l \leq \max(p, g) \\ \sum_{j=1}^N \varphi_j \psi_{N+l-j}(l) + \sum_{j=N+l-g}^N \hat{c}_{N+l, j\epsilon_j \pm x_0} [\sigma_a^2 (1 + G_1^2 + \dots + G_{l-1}^2)]^{\frac{1}{2}}, & N+l > \max(p, g) \end{cases} \quad (8)$$

由以上的讨论可得对 $l > 0$, 有

$$\begin{aligned} (1) \quad & L_{\pm}^{(3)}(l) \leq (l), \quad L_{\mp}^{(3)}(l) \geq L_{\mp}^{(2)}(l), \\ (2) \quad & \lim_{N \rightarrow \infty} (L_{\pm}^{(3)}(l) - L_{\pm}^{(2)}(l)) = 0; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (L_{\mp}^{(3)}(l) - L_{\mp}^{(2)}(l)) = 0, \\ (3) \quad & \sigma_a^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(T_0 - \sum_{i=1}^N \hat{c}_{N+l, i\epsilon_i^2} \right) / (1 + G_1^2 + \dots + G_{l-1}^2) \end{aligned}$$

其中公式中的符号的定义见文^[3]。

因此, 在实际应用中, 若要求从较少数据就开始作出尽可能精确的预报趋势, 可先用适时区间预报并结合公式(8), 用 $L_{\pm}^{(3)}(l)$, $L_{\mp}^{(3)}(l)$ 分别代替 $L_{\pm}^{(2)}(l)$, $L_{\mp}^{(2)}(l)$ 。当 N 增加到一定数量后, 可改用平稳递推区间预报, 以减少每步的计算量, 提高预报精度。

参 考 文 献

- [1] Box·G·P·and G·M·Jenkins, Time series analysis forecasting and control, Holden Day, (1970).
- [2] 中国科学院应用数学研究所, 动态数据处理—时间序列分析, 5 (1983).
- [3] 陈建伟, 随机序列的适时区间预报法及其应用, 华侨大学学报(自然科学版), 6, 4 (1985).

Approximate Identity of Stationary and Updated Interval Predictions in Random Sequence

Chen Jianwei

Abstract

This paper gives an outline of stationary and updated interval predictions in random sequence, and demonstrate their approximate identity, and thus reveals their interrelationship.