

三层对称差分格式的稳定性

曾 文 平

(应用数学系)

摘 要

本文考虑三层对称差分格式的稳定性,借助于 Richtmyer-Lax 的理论^[2],提出一些简单的稳定性判别准则,推广了这一类差分格式稳定性的判别范围.

用差分法求解典型的热传导方程或波动方程的混合问题时,常采用关于空间方向对称的三层对称差分格式

$$\begin{cases} A_1 \bar{u}_{j+1} = A_2 \bar{u}_j + A_3 \bar{u}_{j-1} + \bar{f}_j \\ \bar{u}_0 = \bar{\varphi} \\ \bar{u}_1 = \bar{\psi} \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots) \quad (1)$$

其中 $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, \bar{f}_j 均为已知的 $(N-1)$ 维列向量,且

$$\bar{u}_j = [u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{N-1,j}]^T$$

$$A_i = \begin{pmatrix} b_i & a_i & & & \\ & a_i & b_i & & \\ & & a_i & b_i & \\ & & & a_i & b_i \\ & & & & a_i & b_i \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

a_i, b_i 均为实数, N 为任意正整数,且设 A_1 非奇异.

对此,文 [1] 中引入一个简单的稳定性判别法,但其条件过于苛刻,以致一些典型的三层对称差分格式的稳定性也不能用它判别.本文利用 Richtmyer-Lax 的稳定性充分条件,提出几个简单的稳定性判别准则,其条件比文 [1] 较弱,从而推广了这一类差分格式稳定性的判别范围,改进并推广了文 [1] 的结果.

引理 1 形如式 (2) 的矩阵 A_i 之特征值及相应的特征向量为

本文 1985 年 9 月 3 日收到.

$$\lambda_m^{(1)} = b_i + 2a_i \cos \frac{m\pi}{N} = b_i + 2a_i - 4a_i \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \quad (3)$$

$$\vec{x} = \left[\sin \frac{m\pi}{N}, \sin \frac{2m\pi}{N}, \dots, \sin \frac{(N-1)m\pi}{N} \right] \quad (m=1, 2, \dots, N-1)$$

证见文〔3〕

若矩阵 A_1 非奇异, 则 $\lambda_m^{(1)} \neq 0 (m=1, 2, \dots, N-1)$, 由文〔2〕知, 差分格式(1)的传播矩阵为

$$G(m, \Delta t) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_m^{(2)}}{\lambda_m^{(1)}} & \frac{\lambda_m^{(3)}}{\lambda_m^{(1)}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

其特征方程为

$$\lambda_m^{(1)} \rho^2 - \lambda_m^{(2)} \rho - \lambda_m^{(3)} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, N-1) \quad (5)$$

如文〔1〕引进如下记号

$$\begin{cases} \alpha_i = b_i - 2a_i, & \beta_i = b_i + 2a_i, & (i=1, 2, 3) \\ \delta_1 = \alpha_1 + \alpha_3, & \delta_2 = \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2, & \delta_3 = \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_2 \\ \gamma_1 = \beta_1 + \beta_3, & \gamma_2 = \beta_1 - \beta_3 - \beta_2, & \gamma_3 = \beta_1 - \beta_3 + \beta_2 \end{cases} \quad (6)$$

则有

引理 2 设 A_1 对角占优, 则对任何 N , 方程(5)之根满足 Von-Neumann 条件的充要条件是 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 不异号。(证见文〔1〕)。

引理 3 实系数二次方程

$$AX^2 + BX + C = 0 \quad (A > 0) \quad (7)$$

的两个根位于单位圆内或圆上, 且一个根严格地在单位圆内的充要条件是

$$\begin{cases} A - C > 0 \\ A + B + C \geq 0 \\ A - B + C > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} A - C > 0 \\ A + B + C > 0 \\ A - B + C \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

这一结论为 S. McKee 于 1970 年获得, 但由于它尚鲜为人知, 特补证如下:

先证必要性。如果 $|X_1| \leq 1, |X_2| < 1$, 则由韦达定理知

$$\begin{cases} X_1 \cdot X_2 = \frac{C}{A} \\ X_1 + X_2 = -\frac{B}{A} \end{cases} \quad (9)$$

所以, $|X_1 \cdot X_2| = \left| \frac{C}{A} \right| < 1$, $|C| < |A| = A$, 即

$$-A < C < A$$

或 $A + C > 0$ 且 $A - C > 0$

又当 $X_1 \neq \pm 1$ 时, 由式(9)得

$$\begin{aligned} A + B + C &= A \left(1 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) = A(1 - X_1 - X_2 + X_1 X_2) \\ &= A(1 - X_1)(1 - X_2) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{且 } A - B + C &= A \left(1 - \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) \\ &= A(1 + X_1 + X_2 + X_1 X_2) \\ &= A(1 + X_1)(1 + X_2) > 0 \end{aligned}$$

而当 $X_1 = 1$ 时,

$$A + B + C = A(1 - X_1 - X_2 + X_1 X_2) = A(1 - 1 - X_2 + X_2) = 0$$

$$\text{但 } A - B + C = A(1 + X_1 + X_2 + X_1 X_2) = 2A(1 + X_2) > 0$$

同理, 当 $X_1 = -1$ 时, 可推出

$$A + B + C = 2A(1 - X_2) > 0$$

$$\text{但 } A - B + C = 0$$

必要性证毕。

次证充分性, 已知式(8)成立, 则当 $X_1 + X_2 \geq 0$ 时, 因

$$\begin{aligned} A + B + C &= A \left(1 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) = A(1 - X_1 - X_2 + X_1 X_2) \\ &= A(1 - X_1)(1 - X_2) \geq 0 \end{aligned}$$

所以

$$(i) \begin{cases} 1 - X_1 \geq 0 \\ 1 - X_2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} X_1 \leq 1 \\ X_2 \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

或

$$(ii) \begin{cases} 1 - X_1 \leq 0 \\ 1 - X_2 \leq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} X_1 \geq 1 \\ X_2 \geq 1, \end{cases}$$

但因 $X_1 X_2 = \frac{C}{A} < 1$, 故此种情况不可能。

又因

$$\begin{aligned}
 A - B + C &= A \left(1 - \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) = A(1 + X_1 + X_2 + X_1 X_2) \\
 &= A(1 + X_1)(1 + X_2) > 0
 \end{aligned}$$

所以

$$(i) \begin{cases} 1 + X_1 > 0 \\ 1 + X_2 > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} X_1 > -1 \\ X_2 > -1 \end{cases} \quad (11)$$

或

$$(ii) \begin{cases} 1 + X_1 < 0 \\ 1 + X_2 < 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} X_1 < -1 \\ X_2 < -1, \end{cases}$$

但因 $X_1 X_2 = \frac{C}{A} < 1$, 故此种情况亦不可能。

所以, 由式(10)及(11)得

$$\begin{cases} -1 < X_1 \leq 1 \\ -1 < X_2 \leq 1, \end{cases}$$

但 $X_1 X_2 = \frac{C}{A} < 1$, 故不可能 X_1 与 X_2 同时为 1。从而不妨设

$$\begin{cases} -1 < X_1 \leq 1 \\ -1 < X_2 < 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} |X_1| \leq 1 \\ |X_2| < 1 \end{cases}$$

当 $X_1 + X_2 < 0$ 时类似证明。引理 3 证毕。

引理 4 实系数二次方程(7)的两根不在单位圆外的充要条件是

$$A - C \geq 0, \quad A + B + C \geq 0, \quad A - B + C \geq 0 \quad (12)$$

定理 1 设 A_1 非奇异, 则当

(i) $A_3 = A_1$ 时, 差分格式(1)稳定的充要条件是 $A_2 = 0$

(ii) $A_3 = -A_1$, 且 $A_2 = 0$ 时, 差分格式(1)稳定。

证 因

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{(2)}}{m} & \frac{\lambda^{(3)}}{m} \\ \frac{\lambda^{(1)}}{m} & \frac{\lambda^{(1)}}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^* = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{(2)}}{m} & 1 \\ \frac{\lambda^{(1)}}{m} & \\ \frac{\lambda^{(3)}}{m} & 0 \\ \frac{\lambda^{(1)}}{m} & \end{pmatrix}$$

则

$$(11) \quad G^*G = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{(1)2} + \lambda^{(2)2}}{m} & \frac{\lambda^{(2)} \lambda^{(3)}}{m} \\ \frac{\lambda^{(1)2}}{m} & \frac{\lambda^{(1)2}}{m} \\ \frac{\lambda^{(2)} \lambda^{(3)}}{m} & \frac{\lambda^{(3)2}}{m} \\ \frac{\lambda^{(1)2}}{m} & \frac{\lambda^{(1)2}}{m} \end{pmatrix}$$

(12)

$$(13) \quad GG^* = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{(3)2} + \lambda^{(2)2}}{m} & \frac{\lambda^{(2)}}{m} \\ \frac{\lambda^{(1)2}}{m} & \frac{\lambda^{(1)}}{m} \\ \frac{\lambda^{(2)}}{m} & 1 \\ \frac{\lambda^{(1)}}{m} & 1 \end{pmatrix}$$

从而 G 为正规矩阵, 即 $G^*G = GG^*$ 的充要条件为

$$\begin{cases} \lambda^{(1)2} = \lambda^{(3)2} \\ \lambda^{(2)} \lambda^{(3)} = \lambda^{(2)} \lambda^{(1)} \end{cases} \quad (13)$$

即

$$(i) \quad \lambda^{(3)} = \lambda^{(1)}, \quad \lambda^{(2)} \text{ 任意},$$

或

$$(ii) \quad \lambda^{(3)} = -\lambda^{(1)}, \quad \lambda^{(2)} = 0.$$

当 $\lambda^{(3)} = \lambda^{(1)}$ 时, 特征方程(5)化为

$$\rho^2 - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)}} \rho - 1 = 0$$

由引理 4 易知, 其根满足 Von Neumann 条件的充要条件是 $\lambda^{(2)} = 0$.

当 $\lambda^{(3)} = -\lambda^{(1)}$ 且 $\lambda^{(2)} = 0$ 时, 特征方程(5)化为

$$\rho^2 + 1 = 0$$

其根 $\rho_1, \rho_2 = \pm i$ 满足 Von Neumann 条件.

再由 Richtmyer-Lax 充分条件^[2]便完成了本定理的证明.

定理 1 的条件比文[1]中的推论的条件弱.

定理2 设 A_1 对角占优, 且存在与步长 Δt , Δx 无关的常数 c , 使

$$\left| \sqrt{\lambda_m^{(2)2} + 4\lambda_m^{(1)}\lambda_m^{(3)}} \right| \geq C > 0 \quad (14)$$

则差分格式(1)稳定的充要条件是 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 不异号.

证 因传播矩阵 $G(m, \Delta t)$ 的两特征值为

$$\rho_{1,2} = \frac{\lambda_m^{(2)} \pm \sqrt{\lambda_m^{(2)2} + 4\lambda_m^{(1)}\lambda_m^{(3)}}}{2\lambda_m^{(1)}} \quad (15)$$

两特征向量为

$$X_{1,2} = K \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_m^{(2)} \pm \sqrt{\lambda_m^{(2)2} + 4\lambda_m^{(1)}\lambda_m^{(3)}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中 $K > 0$ 为标准化因子, 于是

$$|\det(X_1, X_2)| = 2K^2 \sqrt{\lambda_m^{(2)2} + 4\lambda_m^{(1)}\lambda_m^{(3)}} \quad (17)$$

由 Richtmyer-Lax 充分条件^[2]知, 当

$$|\det(X_1, X_2)| = 2K^2 \left| \sqrt{\lambda_m^{(2)2} + 4\lambda_m^{(1)}\lambda_m^{(3)}} \right| \geq C_1 > 0$$

其中 C_1 为与步长 Δt , Δx 无关的常数, 则差分格式(1)稳定的充要条件是 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 互不异号, 这就完成了定理2的证明.

文[1]中的基本定理的根本弱点是忽视了特征方程出现共轭复根这一重要情况, 而这恰恰是必需加以考虑的, 定理2则弥补了这一缺陷, 从而扩充了文[1]的结果.

定理3 如果矩阵 A_1 对角占优, 则差分格式(1)稳定的充分条件是

$$\begin{cases} \delta_1 > 0, & \gamma_1 > 0 \\ \delta_2 > 0, & \gamma_2 > 0 \\ \delta_3 > 0, & \gamma_3 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \delta_1 > 0, & \gamma_1 > 0 \\ \delta_2 \geq 0, & \gamma_2 \geq 0 \\ \delta_3 > 0, & \gamma_3 > 0 \end{cases} \quad (18)$$

证 如果 A_1 对角占优, 则由 $\lambda_m^{(1)}$ 的表达式可得

$$\text{Sign}(\lambda_m^{(1)}) = \text{Sign}(b_1)$$

不妨设 $b_1 > 0$, 则 $\lambda_m^{(1)} > 0$, 对任何 N , 由引理3, 特征方程(5)之两根在单位圆上或圆内, 且至少一根严格地位于单位圆内的充要条件是

$$A - C = \lambda_m^{(1)} + \lambda_m^{(3)} = b_1 + b_3 + 2(a_1 + a_3) - 4(a_1 + a_3) \sin^2 \frac{m\pi}{2N} > 0$$

$$A + B + C = \lambda_m^{(1)} - \lambda_m^{(2)} - \lambda_m^{(3)}$$

$$= (b_1 - b_2 - b_3) + 2(a_1 - a_2 - a_3) - 4(a_1 - a_2 - a_3) \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \geq 0 \text{ (或 } > 0 \text{)} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A - B + C &= \lambda_m^{(1)} + \lambda_m^{(2)} - \lambda_m^{(3)} \\ &= (b_1 + b_2 - b_3) + 2(a_1 + a_2 - a_3) - 4(a_1 + a_2 - a_3) \sin^2 \frac{m\pi}{2N} > 0 \text{ (或 } \geq 0 \text{)} \end{aligned}$$

而式(19)对一切 N , $m(1 \leq m \leq N-1)$ 成立等价于如下两组不等式:

$$\delta_1 = b_1 + b_3 - 2(a_1 + a_3) > 0 \quad \text{且} \quad \gamma_1 = b_1 + b_3 + 2(a_1 + a_3) > 0$$

$$\delta_2 = b_1 - b_2 - b_3 - 2(a_1 - a_2 - a_3) \geq 0 \text{ (或 } > 0 \text{)}$$

且

$$\gamma_2 = b_1 - b_2 - b_3 + 2(a_1 - a_2 - a_3) \geq 0 \text{ (或 } > 0 \text{)}$$

$$\delta_3 = b_1 + b_2 - b_3 - 2(a_1 + a_2 - a_3) > 0 \text{ (或 } \geq 0 \text{)}$$

且

$$\gamma_3 = b_1 + b_2 - b_3 + 2(a_1 + a_2 - a_3) > 0 \text{ (或 } \geq 0 \text{)}$$

再由 Richtmyer-Lax 充分条件^[2]便完成了本定理的证明。

定理3 只要求 A_1 对角占优, 而不必像定理2那样证明

$$\left| \sqrt{\lambda_m^{(2)^2} + 4\lambda_m^{(1)}\lambda_m^{(3)}} \right| \geq C > 0$$

或像文[1]中那样证明

$$\lambda_m^{(2)^2} + 4\lambda_m^{(1)}\lambda_m^{(3)} \geq C > 0$$

而这往往是困难的, 甚至是不可能的, 从而大大扩大了判别此类差分格式稳定性的范围。

为应用方便起见, 仍沿用文[1]中建议的表格形式(表1)。

表 1

i	b_i	a_i	$\alpha_i = b_i - 2a_i$	$\beta_i = b_i + 2a_i$	δ_i	γ_i
1	b_1	a_1	α_1	β_1	$\delta_1 = \alpha_1 + \alpha_3$	$\gamma_1 = \beta_1 + \beta_3$
2	b_2	a_2	α_2	β_2	$\delta_2 = \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2$	$\gamma_2 = \beta_1 - \beta_3 - \beta_2$
3	b_3	a_3	α_3	β_3	$\delta_3 = \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_2$	$\gamma_3 = \beta_1 - \beta_3 + \beta_2$

当差分格式满足定理2及定理3的条件时, 则该格式是稳定的。

例 文[2]中指出的如下差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12\Delta t} \left(\frac{3}{2} u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j+1}^n + \frac{1}{2} u_{j+1}^{n-1} \right) + \frac{5}{6\Delta t} \left(\frac{3}{2} u_j^{n+1} - 2u_j^n + \frac{1}{2} u_j^{n-1} \right) \\ & + \frac{1}{12\Delta t} \left(\frac{3}{2} u_{j-1}^{n+1} - 2u_{j-1}^n + \frac{1}{2} u_{j-1}^{n-1} \right) = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

它可改写为

$$A_1 \bar{u}_{j+1} = A_2 \bar{u}_j + A_3 \bar{u}_{j-1}$$

的形式, 其中

$$A_1 = \frac{3}{2}I + \left(\frac{1}{8} - r\right)p$$

$$A_2 = 2I + \frac{1}{6}p$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}I - \frac{1}{24}p$$

显然, A_1 对角占优, 且

$$A_2 + A_3 = \frac{3}{2}I + \frac{1}{8}p = A_1 + rp$$

$$\begin{aligned} A_2^2 + 4A_1A_3 &= (A_1 - A_3 + rp)^2 + 4A_1A_3 = (A_1 + A_3 + rp)^2 - 4A_3rp \\ &= \left(I + \frac{1}{12}p\right)^2 + 2rp + \frac{r}{6}p^2 \end{aligned}$$

其特征值为

$$\left(1 - \frac{1}{3}\sin^2 \frac{m\pi}{2N}\right)^2 - 8r \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \left(1 - \frac{1}{3}\sin^2 \frac{m\pi}{2N}\right)$$

又有如表 2 所示表格, 难以用文 [1] 方法及定理 2 判别其稳定性. 但由上述表格明显看出它也满足定理 3 的条件, 故由定理 3 立即断定此差分格式绝对稳定, 且可省去判别

$$\left| \sqrt{\lambda_{\frac{(2)}{m}}^2 + 4\lambda_{\frac{(1)}{m}}\lambda_{\frac{(3)}{m}}} \right| \geq C > 0$$

这一令人麻烦的步骤.

表 2

i	b_i	a_i	α_i	β_i	δ_i	γ_i
1	$\frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{8} - r\right)$	$\frac{1}{8} - r$	$1 + 4r$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} + 4r > 0$	$1 > 0$
2	$2 - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	2	$4r > 0$	0
3	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{8}{3} + 4r > 0$	$4 > 0$

参 考 文 献

- [1] 谭国富, 一类差分格式稳定性的判别法, 高等学校计算数学学报, 3 (1984).
- [2] R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference Methods for Initial-Value Problems, Second Edition, (1967).

-
- [3] 李荣华、冯果忱编, 微分方程数值解法, 人民教育出版社, (1980).
- [4] S. McKee, A Generalization of the Du Fort-Frankel Scheme, J. Inst. Maths Applies, 10, 1 (1972).
- [5] 南京大学计算数学专业编, 偏微分方程数值解法, 科学出版社, (1979).

The Stability of Three Layer Symmetric Difference Schemes

Zeng Wenping

Abstract

This paper discusses the stability of three layer symmetric difference schemes, and provides some simple criteria of stability based on Richtmeyer-Lax theorem^[2], and thus widen the discrimination range of the stability of this kind of difference schemes.