

关于任意视点的透视变换

郑厚生

(精密机械工程系)

摘要

本文对任意视点的透视变换进行了分析研究,提出了变换和计算的方法,并得出了若干结论。它对计算机图学的理论研究,具有实际意义。

在利用齐次坐标法进行透视变换时,一般总是将视点固定在确定物体位置的空间坐标系的一根坐标轴上^[2-4]。当改变空间物体的位置时(平移或旋转),将获得各种合乎实际要求的透视图。如果我们将空间物体位置固定,而改变视点的位置,同样可以获得各种透视图。后一种方法,我们称为任意视点的透视变换。

这种方法,在绘制建筑透视图时,更具有实际意义。特别是当利用电子计算机绘图时,这种方法的优点将更加明显。

一、引 论

图1所示,在坐标系O-XYZ中,有一点P(x y z)。视点即投影中心E(0 0 -k)位于Z轴上。投影平面为Z=0。过视点E作视线EP,与投影平面Z=0交于点P*。P*点即为P点的透视投影。由相似三角形得

$$\frac{x^*}{k} = \frac{x}{(z+k)}, \text{ 並令 } r = \frac{1}{k}$$

则
$$x^* = \frac{x}{z+k} = \frac{x}{rz+1}$$

同样
$$y^* = \frac{y}{z+k} = \frac{y}{rz+1} \quad (1-1)$$

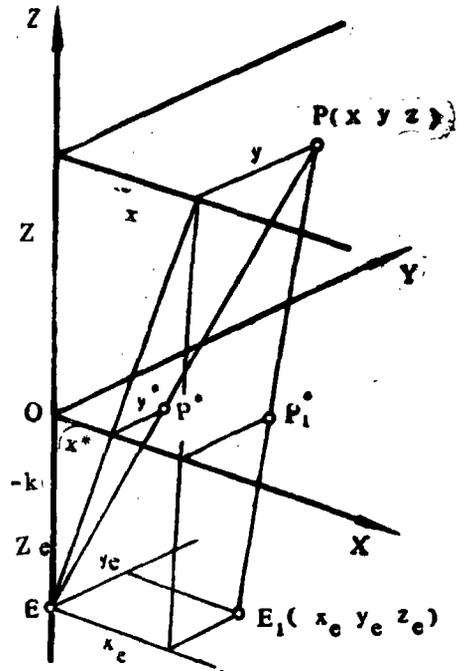


图1

本文1986年4月1日收到。

式中 k ——视点与投影平面的距离
 r ——透视参数

上述透视投影可由下述 4×4 变换矩阵而得到

$$[X \ Y \ Z \ H] = [x \ y \ z \ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x \ y \ 0 \ (rz+1)]$$

$$\xrightarrow{\text{正常化}} \begin{bmatrix} x & y & 0 & 1 \\ rz+1 & rz+1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x^* \ y^* \ 0 \ 1] \quad (1-2)$$

这就是说，透视变换完全可以用一个具有适当元素的 4×4 变换矩阵结构来加以实现。

任一空间物体都由一个点集构成。如果空间物体的三个互相垂直的主要平面(基面)分别平行于上述三个坐标平面⁽¹⁾，这时将获得一点透视。如果将该物体绕 Y 轴、或依次绕 Y 轴和 X 轴作适当旋转，将获得两点或三点透视。

如果视点 E 不在 Z 坐标轴上，而是在任意位置，例如 $E_1(x_e \ y_e \ z_e)$ ，那么，在任意视点 E_1 的条件下， P 点的透视投影 P_1^* 点如何求出？如何找到这个变换过程的规律？这正是本文所要探讨的问题。

二、任意视点透视变换的讨论

要解决任意视点条件下的透视变换，其基本方法是，首先，要在透视变换之前，对原坐标系进行仿射变换，使仿射变换后的新坐标系的 Z' 轴与任意视点 E_1 的视线方向一致。仿射变换后再进行透视变换。但是，在具体进行仿射变换时，还有不同的方法和技巧，因而可以得到不同的结果。

1. 仿射变换时采用映象法

图2所示，在坐标系 $O'-XYZ$ 中有一点 $P(x \ y \ z)$ 。任意视点为 $E_1(x_e \ y_e \ z_e)$ 。投影平面为 $Z=0$ 。

在透视变换之前，我们先进行仿射变换。

仿射变换时，新坐标系 $O''-$

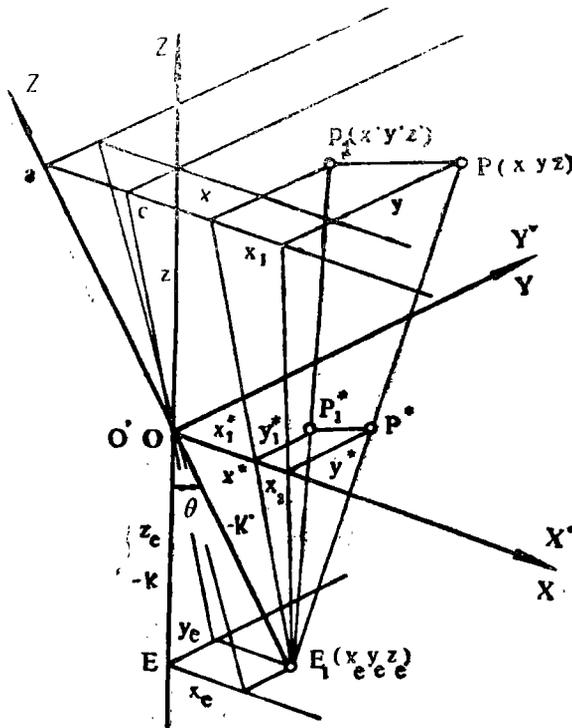


图2

(1) 注：实际上，不管空间物体是用正投影或坐标给出，总是将空间物体位置放置成这种特殊位置，因为这对表达是很方便的。

$X'Y'Z'$ 按如下确定：新坐标系的 Z' 轴通过任意视点 E_1 和原点 O （即原点 O 不变），连接 E_1O 作为 Z' 轴方向。 X 、 Y 轴不动，即作为 X' 、 Y' 轴。这样就构成一个新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 。同时，假定新旧坐标系各轴向单位长度是相同的。这时， $x'=x$ ， $y'=y$ ， $z'=z/\cos\theta$ ， θ 为 Z' 轴与 Z 轴的夹角。这样，在原坐标系 $O-XYZ$ 中的原象点 $P(x\ y\ z)$ ，经仿射变换后，在新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 中的映象为点 $P_1(x'\ y'\ z')$ 。

任意视点 E_1 在原坐标系的坐标 x_e, y_e, z_e ，与 θ 角以及透视参数 r' 的关系如下：

$$\cos\theta = \frac{z_e}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}} \quad (2-1)$$

$$k' = \sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2} = \frac{z_e}{\cos\theta} \quad (2-2)$$

$$r' = \frac{1}{k'} = \frac{\cos\theta}{z_e} \quad (2-3)$$

这样， P 点的仿射变换

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x \ y \ z/\cos\theta \ 1] \quad (2-4)$$

然后，再进行透视变换

$$\begin{aligned} [X \ Y \ Z \ H] &= [x' \ y' \ z' \ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x \ y \ z \ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= [x \ y \ 0 \ (\frac{r'z}{\cos\theta} + 1)] = [x \ y \ 0 \ (\frac{z}{z_e} + 1)] \xrightarrow{\text{正常化}} \left[\frac{x \cdot z_e}{z + z_e} \ \frac{y \cdot z_e}{z + z_e} \ 0 \ 1 \right] \\ &= [x^* \ y^* \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

这样，变换后的普通坐标

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{x \cdot z_e}{z + z_e} \\ y_1^* = \frac{y \cdot z_e}{z + z_e} \end{cases} \quad (2-5)$$

这就是 P 点的映象 P_1 点经过透视变换后在 $Z'=O$ 投影平面上的透视投影的坐标。

上面已经说明，由于仿射变换时，假定 $x'=x$ ， $y'=y$ ，因此，上述透视变换后的普通坐标 $(x_1^* \ y_1^*)$ 是 P 点在新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 中的映象 P_1 点的透视投影，还不是空间原象 P 点的透视投影。如果要得到原象 P 点的透视投影 P^* 点，还得进行将 P_1^* 点移至 P^* 点的转换，也就是说，还要在投影平面上对 P_1^* 点进行定比和定位。其方法如下。

从图2中可以看出，当 P_1 点移至 P 点时，则 P_1^* 点移至 P^* 点。从相似三角形可以看出，它们在 X 轴方向移动的距离 x_1 和 x_2 成正比

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{ac}{x_2} = \frac{z + z_e}{z_e}, \quad \text{且} \quad \frac{ac}{x_e} = \frac{z}{z_e}$$

从而得

$$x_2 = \frac{z \cdot x_e}{z + z_e}$$

同样
$$y_2 = \frac{z \cdot y_e}{z + z_e} \quad (2-6)$$

x_2, y_2 就是当 P_1^* 点移至 P^* 点时在 X, Y 轴方向移动的距离。因而

$$\begin{cases} x^* = x_1^* + x_2 = \frac{z_e \cdot x + z \cdot x_e}{z + z_e} \\ y^* = y_1^* + y_2 = \frac{z_e \cdot y + z \cdot y_e}{z + z_e} \end{cases} \quad (2-7)$$

其定位关系如图 3 (a) 所示。实际上，我们可以从公式 (2-7) 直接算出 x^* 和 y^* ，只要将空间点 $P(x, y, z)$ 和任意视点 $E_1(x_e, y_e, z_e)$ 的具体坐标数值代入即可。

从上述结果可以看出，在仿射变换时，如果先求出原坐标系中的 P 点在新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 中的映象 P_1 点，然后再进行透视变换，那么，在 $Z'=0$ 投影平面上所得到的透视投影，还必须进行定位。而考虑定位关系在内，可以得出直接计算的公式 (2-7)。

按照仿射变换的一般原理，新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 各轴之间的夹角和轴向单位向量大小都可以不同。因此，在仿射变换时，除了按要求 Z' 轴必须与视线保持一致外，其它两根坐标轴 X', Y' 轴可以适当选择 (不象上述与 X, Y 轴一致)，那么，仿射变换后，再经过透视变换，所得到的在 $X'O'Y'$ 投影平面 (即 $Z'=0$) 上的透视投影 $P_1^*(x_1^*, y_1^*)$ ，还必须进一步利用仿射变换来进行定比和定位。如图 3 (b) 所示。图中， $x^* = I_x \cdot x_1^*, y^* = I_y \cdot y_1^*$ 。 I_x, I_y 分别为 X 轴和 X' 轴、 Y 轴和 Y' 轴的轴向单位向量的模之比。然后，再根据 (x^*, y^*) 作出 p^* 点。

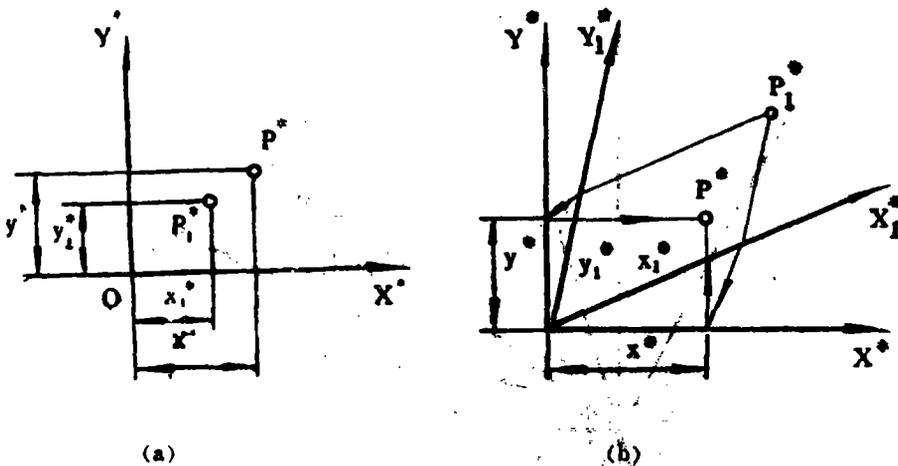


图 3

根据上面分析，我们可以看出：(1) 如果空间物体的三个互相垂直的主要平面放置成分别平行于三个坐标平面，而不作任何旋转，那么，在上述仿射变换时采用映象法，只能得到一点透视，且需进行定比和定位。(2) 如果在仿射变换时，采用 $Z=0$ 投影平面不变 (即 X, Y 轴不变)，而只变更 Z 轴，所获得的任意视点透视变换，也完全可以用平移原坐标系 $O-XYZ$ 的方法来达到，即平移原坐标系使 Z 轴通过给定的任意视点 $E_1(x_e, y_e, z_e)$ 。这时，所得到的计算公式与公式 (2-7) 完全相同。因此，上述仿射变换时采用映象法，只是作为另一种可采用的

方法,但不能取得其它的效果。要解决在任意视点条件下,通过改变视点的位置,能获得各种透视图的效果,就必须在仿射变换时采用其它具体方法。这在下面将着重进一步讨论。

2、在仿射变换时采用原象点以新坐标系的坐标值表示的方法

如果我们在进行仿射变换时,新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 这样选择:使 Z' 轴与任意视点 E_1 的视线一致,且通过原点 O ,即 E_1O 作为 Z' 轴方向;同时,新坐标系的三根坐标轴仍保持原来互相垂直的关系。实际上,可以认为,这是将原坐标系 $O-XYZ$ 绕过原点 O 的水平旋转轴 MN 旋转一个 θ 角(使 Z' 轴通过任意视点 E_1)后的位置,作为新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 的位置。如图 4 和图 5 所示。同时,采用原象点 P 以新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 中的坐标值来表示的方法。这样,仿射变换后,再进行透视变换,就能获得满意的效果。

要解决求原坐标系的点 $P(x, y, z)$ 的位置向量在新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 中的分量,首先要进行两个坐标系之间的底矢变换。

设原坐标系 $O-XYZ$ 和新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 的底矢分别为 e_x, e_y, e_z 和 $e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}$ 。为了计算方便,我们将这些底矢的模都取为相同的单位长度,并且,可以将底矢 $e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}$ 写成 e_x, e_y, e_z 的线性组合,即:

$$\begin{cases} e_{x'} = a_{11}e_x + a_{12}e_y + a_{13}e_z \\ e_{y'} = a_{21}e_x + a_{22}e_y + a_{23}e_z \\ e_{z'} = a_{31}e_x + a_{32}e_y + a_{33}e_z \end{cases} \quad (2-8)$$

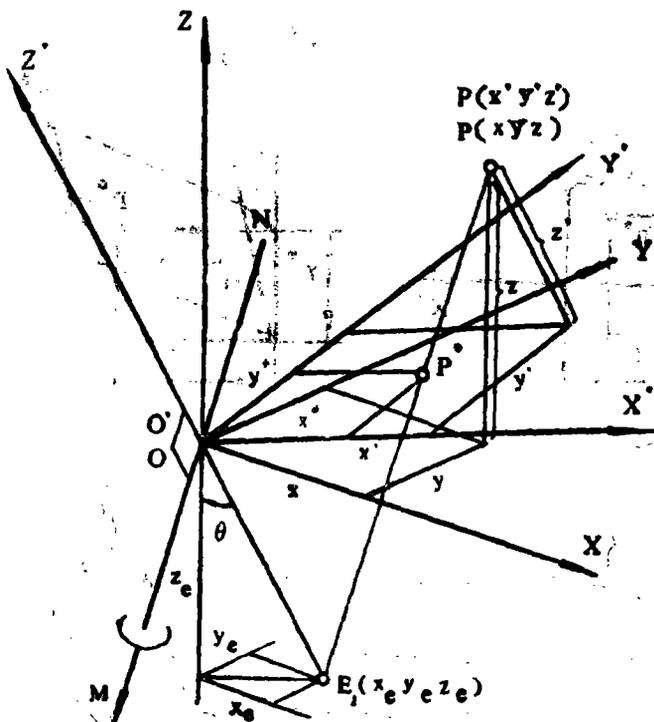


图 4

或

$$\begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

上述系数矩阵，实际上就是原坐标系 $O-XYZ$ 绕过原点 O 的水平旋转轴 MN 旋转一个 θ 角度后的旋转矩阵 $[R]$ 。

如果将绕过原点 O 的空间一般位置旋转轴的旋转矩阵公式简化一下，就可得到绕过原点 O 的水平旋转轴的旋转矩阵公式

$$[R] = \begin{pmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \theta & n_1 n_2 (1 - \cos \theta) & -n_2 \sin \theta \\ n_1 n_2 (1 - \cos \theta) & n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \theta & n_1 \sin \theta \\ n_2 \sin \theta & -n_1 \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2-10)$$

式中， $n_1 = \cos \alpha$ ， $n_2 = \cos \beta$ ， $n_3 = \cos \gamma$ ，分别表示旋转轴方向的单位向量 n 的三个方向余弦。 θ 为旋转角。由于是绕过原点 O 的水平旋转轴旋转， $n_3 = 0$ ，在简化成上述公式时，已将 n_3 有关的项消去。

这样，原坐标系 $O-XYZ$ 中的 P 点的坐标值 $(x \ y \ z)$ 与它在新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 中的坐标值 $(x' \ y' \ z')$ 之间的关系为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

得仿射变换公式

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' \\ y = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' \\ z = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' \end{cases}$$

用高斯消去法(矩阵表示)可解得 x' 、 y' 、 z' 。

求出 x' 、 y' 、 z' 后，再进行透视变换

$$[X \ Y \ Z \ H] = [x' \ y' \ z' \ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x' \ y' \ 0 \ (r'z' + 1)] \Rightarrow$$

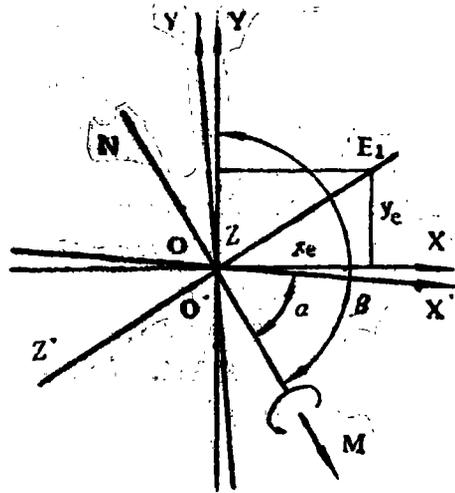


图5 坐标系旋转的俯视图情况 (Z轴由O向上, $\gamma = 90^\circ$)

$$\xrightarrow[\text{正常化}]{} \begin{bmatrix} x' & y' & & \\ r'z'+1 & r'z'+1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x^* \ y^* \ 0 \ 1]$$

由于原坐标系的点 $P(x \ y \ z)$ 是用新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 中的坐标值 $P(x' \ y' \ z')$ 表示的, 它所表示的还是空间同一点 P , 因此, 在 $X'O'Y'$ 投影平面上所得出的透视投影 $(x^* \ y^*)$, 就是真实的位置, 不必再进行定比和定位. 给定 $P(x \ y \ z)$, 按上述计算公式和步骤, 即可求出 $(x^* \ y^*)$.

我们以一个具体例子, 来说明具体计算方法和步骤. 例如, 在坐标系 $O-XYZ$ 中, 有一点 $P(22 \ 19 \ 35)$, 任意视点为 $E_1(11 \ 7 \ 31)$, 经过上述仿射变换和透视变换, 求在 $X'O'Y'$ 投影平面(即 $Z'=0$)上的透视投影.

解 按给定条件, $x=22$, $y=19$, $z=35$; $x_e=11$, $y_e=7$, $z_e=31$. 根据上述方法进行仿射变换, 再进行透视变换. 计算时, 将上述具体坐标值代入有关公式. 其计算步骤如下.

(1) 求旋转角(图 4)

$$\cos \theta = \frac{z_e}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}} = 0.922; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}} = 0.388$$

(2) 求旋转轴的三个方向余弦(图 5)

$$n_1 = \cos \alpha = \frac{y_e}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = 0.537; \quad n_2 = \cos \beta = \frac{-x_e}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = -0.844$$

$$n_3 = \cos \gamma = \cos 90^\circ = 0$$

(3) 求底矢变换的系数矩阵(按公式 2—10)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \theta & n_1 n_2 (1 - \cos \theta) & -n_2 \sin \theta \\ n_1 n_2 (1 - \cos \theta) & n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \theta & n_1 \sin \theta \\ n_2 \sin \theta & -n_1 \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.944 & -0.035 & 0.327 \\ -0.035 & 0.977 & 0.208 \\ -0.327 & -0.208 & 0.922 \end{pmatrix}$$

(4) 求空间点 P 仿射变换后在新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 中的坐标值(按公式 2—11)

$$\begin{cases} x = 22 = 0.944x' - 0.035y' - 0.327z' \\ y = 19 = -0.035x' + 0.977y' - 0.208z' \\ z = 35 = 0.327x' + 0.208y' + 0.922z' \end{cases}$$

用高斯消去法(矩阵表示)可解得:

$$x' = 31.902, \quad y' = 25.260, \quad z' = 22.118$$

(5) 进行透视变换

$$[X \ Y \ Z \ H] = [x' \ y' \ z' \ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x' \ y' \ 0 \ (r'z'+1)]$$

$$\xrightarrow[\text{正常化}]{} \begin{bmatrix} x' & y' & & \\ r'z'+1 & r'z'+1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x^* \ y^* \ 0 \ 1] = [19.264 \ 15.254 \ 0 \ 1]$$

得变换后的普通坐标

$$\begin{cases} x^* = 19.264 \\ y^* = 15.254 \end{cases}$$

计算完毕。

当空间物体或结构物的三个互相垂直的主要平面，分别平行于确定该物体空间位置的坐标系 $O-XYZ$ 的三个坐标面时，在任意视点的条件下，采用上述仿射变换后再进行透视变换，那么，在新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 的 $Z'=0$ 的投影平面上，能直接获得两点透视或三点透视。而这与任意视点 E_1 的具体位置特征有关。

根据任意视点 E_1 的具体位置特征，分析新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 的 $Z'=0$ 投影平面与物体三个互相垂直的平面的空间位置关系，再利用透视原理和特性，可得出如下结论：

如果任意视点为 $E_1(x_e, y_e, z_e)$ ，当 $x_e \neq 0, y_e = 0$ ，或 $x_e = 0, y_e \neq 0$ 时，将获得两点透视；当 $x_e \neq 0, y_e \neq 0$ 时，将获得三点透视；当 $x_e = y_e = 0$ ，任意视点又回到 Z 轴上来，将获得一点透视。当然所有情况都是 $z_e \neq 0$ 。

图6表示任意视点为 $E_1(x_e, 0, z_e)$ 的情况。这时，仿射变换时的新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ ，相当于原坐标系 $O-XYZ$ 绕 Y 轴旋转一个 θ 角到 Z' 轴通过 $E_1(x_e, 0, z_e)$ 时的情况。按右手定则，确定 θ 的正负值。在这种情况下，旋转轴的两个方向余弦 n_1 和 n_3 等于零， $n_2 = 1$ 。将获得两点透视。

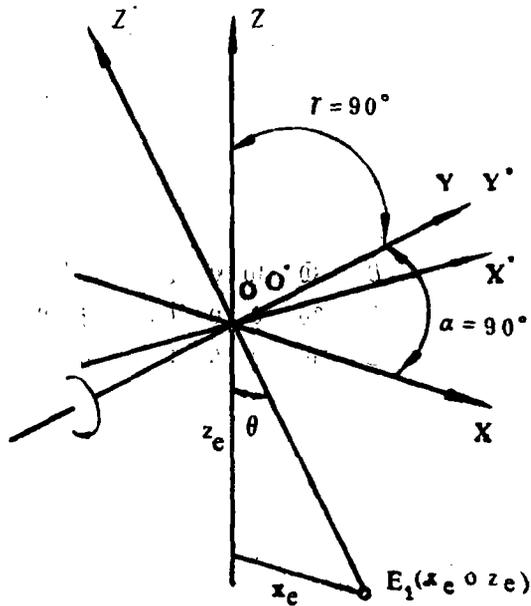


图6

我们结合一个具体例子来说明。设空间一正方体，其各顶点坐标用矩阵表示。任意视点为 $E_1(18 \ 0 \ 30)$ 。求按上述仿射变换和透视变换后所得到的透视图。

解 计算时，将任意视点 E_1 和正方体各顶点的坐标值代入有关公式，并按下述计算步骤进行。

(1)求旋转角(这时 θ 角为负值)

$$\cos \theta = \frac{z_e}{\sqrt{x_e^2 + z_e^2}} = 0.857$$

$$\sin \theta = \frac{-x_e}{\sqrt{x_e^2 + z_e^2}} = -0.515$$

(2)求旋转轴的三个方向余弦

$$n_1 = \cos \alpha = \cos 90^\circ = 0, \quad n_2 = \cos \beta = \cos 0^\circ = 1,$$

$$n_3 = \cos \gamma = \cos 90^\circ = 0.$$

(3)求底矢变换的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \theta & n_1 n_2 (1 - \cos \theta) & -n_2 \sin \theta \\ n_1 n_2 (1 - \cos \theta) & n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \theta & n_1 \sin \theta \\ n_2 \sin \theta & -n_1 \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.857 & 0 & 0.515 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.515 & 0 & 0.857 \end{pmatrix}$$

(4) 求正方体各顶点经仿射变换后在新坐标系 $O' - X'Y'Z'$ 中的坐标值

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x = 0.857x' - 0.515z' \\ y = y' \\ z = 0.515x' + 0.857z' \end{cases}$$

用高斯消去法(矩阵表示)解得每一个顶点 $(x \ y \ z)$ 相应的 $(x' \ y' \ z')$ 。

(5) 进行透视变换

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -30 & 0 & 1 \\ -30 & -30 & 0 & 1 \\ -30 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -30 & 30 & 1 \\ -30 & -30 & 30 & 1 \\ -30 & 0 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -50 & 0 & 1 \\ -30 & -50 & 0 & 1 \\ -30 & -20 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & 0 & 1 \\ 0 & -50 & 30 & 1 \\ -30 & -50 & 30 & 1 \\ -30 & -20 & 30 & 1 \\ 0 & -20 & 30 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{matrix}$$

正方体顶点坐标

平移矩阵

平移后顶点坐标

$$\begin{matrix} \text{仿射变换} \\ \rightarrow \\ \text{透视变换} \end{matrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \\ E' \\ F' \\ G' \\ I' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -50 & 0 & 1 \\ -25.75 & -50 & 15.45 & 1 \\ -25.75 & -20 & 15.45 & 1 \\ 0 & -20 & 0 & 1 \\ 15.45 & -50 & 25.75 & 1 \\ -10.30 & -50 & 41.16 & 1 \\ -10.30 & -20 & 41.16 & 1 \\ 15.45 & -20 & 25.75 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.029 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -50 & 0 & 1 \\ -25.75 & -50 & 0 & 1.45 \\ -25.75 & -20 & 0 & 1.45 \\ 0 & -20 & 0 & 1 \\ 15.45 & -50 & 0 & 1.75 \\ -10.30 & -50 & 0 & 2.19 \\ -10.30 & -20 & 0 & 2.19 \\ 15.45 & -20 & 0 & 1.75 \end{pmatrix} \begin{matrix} A'' \\ B'' \\ C'' \\ D'' \\ E'' \\ F'' \\ G'' \\ I'' \end{matrix} \Rightarrow$$

仿射变换后顶点坐标

透视变换矩阵

变换后顶点坐标

(1) 注: 在任意视点的透视变换时, 根本不必引入平移参数, 因为在任意视点 $E_1(x_0, y_0, z_0)$ 中就包括了平移参数。此处增加平移变换矩阵, 是因为在绘制图 6 时, 因图位关系, 未敢将 x_0 取得太大, 实际变换时, 这是完全不必要的。

→ 正常化	0	-50	0	1	A^*
	-17.76	-34.48	0	1	B^*
	-17.76	-13.79	0	1	C^*
	0	-20	0	1	D^*
	8.83	-28.57	0	1	E^*
	-4.70	-22.83	0	1	F^*
	-4.70	-9.13	0	1	G^*
	8.83	-11.43	0	1	I^*

正常化后正方体顶点坐标

上述变换后的正方体各顶点的坐标值对应的两点透视图，如图7所示。这一结果表明，本文上述提出的变换和计算方法是正确的。

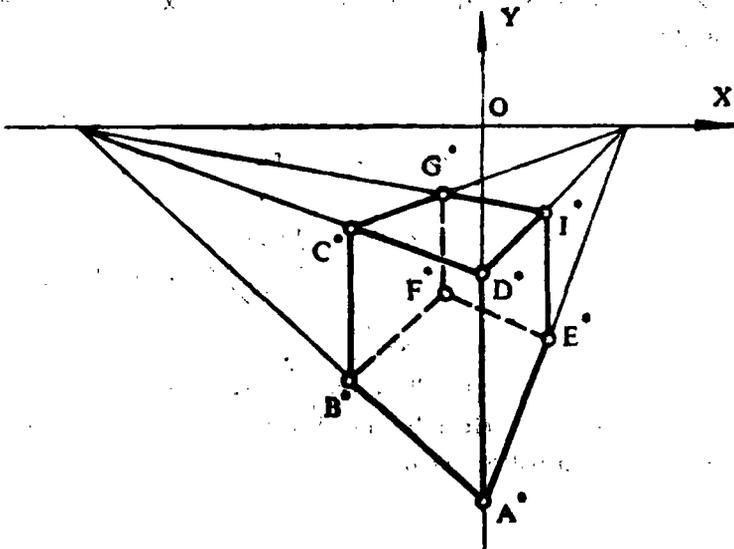


图7

三、简要结论

1. 任意视点的透视变换，要首先进行仿射变换，然后再进行透视变换。仿射变换的原则是，要使新坐标系的 Z' 轴与视线保持一致。如将任意视点 E_1 与原点 O 的连线 E_1O ，作为 Z' 轴方向，将较方便。

2. 仿射变换时，如果将原坐标系 $O-XYZ$ 绕过原点 O 的水平旋转轴旋转一个 θ 角（使 Z' 轴通过任意视点 E_1 ）后的位置，就作为新坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 的位置，这将使计算较方便。同时采用将原坐标系确定的空间点集用新坐标系中的坐标值来表示的方法，那么，再经过透视变换后，将得到满意的变换效果。

3. 根据任意视点 E_1 的位置特征，按照上述仿射变换后，再进行透视变换，将获得不同的透视图。当 $x_e \neq 0, y_e = 0$ ，或 $x_e = 0, y_e \neq 0$ 时，将获得两点透视；当 $x_e \neq 0, y_e \neq 0$ 时，将获得三点透视；当 $x_e = 0, y_e = 0$ 时，将获得一点透视。当 $E_1(x_e, y_e, z_e)$ 采取任一组

不同的坐标值组合, 将获得各种不同表达方式的透视图。

4. 当视点固定在 Z 轴上, 而改变物体或结构物的位置(平移或旋转), 那么, 经透视变换后, 可以获得一点、两点或三点透视。当用任意视点的透视变换时, 尽管其变换方法和计算方法似乎稍稍复杂一点, 但对计算机绘图来说, 那是很容易实现的, 而它的方便、灵活、实用的优点, 将更加明显。比如, 绘制建筑物透视图时, 任意视点的透视变换更符合实际构思过程, 当选择视点时, 包括确定站点位置和视平线高度, 实际上是在考虑任意视点 $E_1(x_e, y_e, z_e)$ 的三个坐标值。如将上述变换的计算方法编成程序, 只要给定和输入任意视点 E_1 的坐标值 x_e, y_e, z_e 的各种组合, 就可以获得各种透视图。从中, 我们可以选择能充分表达结构物特点的透视表达方式。

5. 此外, 从视点固定在 Z 轴上和任意视点的透视变换的控制参数来比较, 如都作三点透视, 则前者需要五个参数(包括 l, m, n 三个平移参数和依次绕 Y 轴和 X 轴旋转 θ 角和 ϕ 角两个参数), 而后者只要控制任意视点 $E_1(x_e, y_e, z_e)$ 三个坐标参数即可。这对选择各自参数的组合, 后者将方便得多。

参 考 文 献

- [1] 卢振荣主编, 计算机绘图初步, 西安交通大学出版社, (1985).
- [2] (美) David F. Rogers, J. Alan Adams 著, 北京工程图学会译, 计算机图学的数学基础, 人民教育出版社, (1982).
- [3] 艾运钊著, 工程图学分析引论, 中国铁道出版社, (1984).
- [4] 上海交通大学、浙江大学、南京工学院编写组编, 计算机制图, 高等教育出版社, (1983).
- [5] Sylvan H. Chasen, Geometric Principles and Procedures for Computer Graphic Application, Printed in the United States of America, (1978).

On Perspective Transformation of Arbitrary Station Points

Zheng Housheng

Abstract

This paper analysis the perspective transformation of arbitrary visual points. The methods of transformation and calculation are given, and several conclusions are reached. This paper is practical for the theoretical research of computer graphics.