第7卷 第2期 华侨大学学报 Vol.7 No.2
1986年5月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY May 1986

Hausdorff空间中逐次叠代法的一点注记

张上泰

（应用数学系）

设（S，τ）是一个拓扑空间，它满足$Hausdorff$分离公理。算子A作用于空间（S，τ），它变收敛序列为收敛序列。例如，A是拓扑空间（S，τ）中的连续映射。如所周知，从拓扑空间（S，τ）中某一个初始元$x_0\in$（S，τ）出发，经过逐次叠代法

$$x_n=Ax_{n-1}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

可以得到拓扑空间（S，τ）中的序列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,\tag{1}$$

如果序列（1）在拓扑空间（S，τ）中收敛于x^*，由于（S，τ）是$Hausdorff$空间，那么x^*就是方程

$$Ax=x\tag{2}$$

在空间（S，τ）中的一个解。

序列（1）收敛于x^*，相当于它的每一个子序列都要同时收敛于x^*。这里，我们要对上述论断作一注记，即如果存在两个自然数a和b，它们的最大公因数（a，b）=1，使得序列（1)的两个子序列

$$x_0,\ x_a,\ x_{2a},\ \cdots,\ x_{ta},\ \cdots,$$

$$x_0,\ x_b,\ x_{2b},\ \cdots,\ x_{tb},\ \cdots,$$

在拓扑空间（S，τ）中分别收敛，那末序列(1)必然收敛，而且收敛于方程(2)的一个解。

以下假定a和b是两个互素之自然数，即(a，b)=1。数论中有这样一个定理：如果整数n大于$ab-a-b$，则它必然可表为a和b的线性型

$$sa+tb,\tag{3}$$

其中s和t是某两个非负整数（见文[1]第一章§8定理3）。

不难看出，我们还可以要求s满足小于b，而且在这个时候，n的上述线性型表出式(3)还是唯一的。事实上，令

$$s_1=s-\left[\frac{s}{b}\right]b,$$

$$t_1=t+\left[\frac{s}{b}\right]a,$$

则

$$s_1a+t_1b=\left(s-\left[\frac{s}{b}\right]b\right)a+\left(t+\left[\frac{s}{b}\right]a\right)b=sa+tb=n,$$

这里的 s_1 和 t_1 显然都是非负整数，而且 $s_1<b$。另方面，如果还有非负整数 s_2 小于 b，而且

$$s_2a+t_2b=n,$$

则

$$s_1a\equiv s_2a\ (mod\ b).$$

但 $(a,b)=1$，从而

$$s_1\equiv s_2\ (mod\ b).$$

由于s_1和s_2都是小于b的非负整数，因此s_1等于s_2，进而得知$t_1=t_2$。

上述数论中的结果，可以用来讨论我们的问题。

定理1　假设A是$Hausdorff$空间(S,τ)中映收敛序列为收敛序列的映射。如果存在两个自然数a和b，$(a,b)=1$，使得对于初始元$x_0\in(S,\tau)$，经逐次叠代

$$x_n=Ax_{n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

而得到的如下两个子序列

$$x_0,\ x_a,\ x_{2a},\ \cdots,\ x_{ia}\cdots, \tag{4}$$

$$x_0,\ x_b,\ x_{2b},\ \cdots,\ x_{jb},\ \cdots, \tag{5}$$

在拓扑空间(S,τ)中分别收敛，那末序列$\{x_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$必收敛于方程

$$Ax=x$$

的一个解。

证　假设子序列(4)和(5)分别收敛于x^*和x^{**}。因

$$x_{ab},\ x_{2ab},\ x_{3ab},\ \cdots,\ x_{kab},\ \cdots$$

既是序列(4)又是序列(5)的子序列，所以$x^*=x^{**}$。由于映射 A 映收敛序列为收敛序列，那末映射A^a和A^b也是拓扑空间(S,τ)中映收敛序列为收敛序列的映射，从而

$$A^ax_{ia}\to A^ax^*\ (\text{当}i\to+\infty).$$

另方面，

$$A^ax_{ia}=x_{(i+1)a}\to x^*\ (\text{当}i\to+\infty),$$

故$A^ax^*=x^*$。类似地，$A^bx^*=x^*$。

下证x^*是方程$Ax=x$的一个解。由于$A^ax^*=x^*$，则对于任何非负整数 s 有

$$A^{sa}x^*=A^{(s-1)a}(A^ax^*)=A^{(s-1)a}x^*=A^{(s-2)a}x^*=\cdots=A^ax^*=x^*.$$

类似地，对于任何非负整数 t 也有

$$A^{tb}x^*=x^*.$$

由于自然数$ab+1$大于$ab-a-b$，根据前面提到的数论结果，有

$$Ax^*=A(A^{ab}x^*)=A^{ab+1}x^*=A^{s_1a+t_1b}x^*=A^{s_1a}(A^{t_1b}x^*)=A^{s_1a}x^*=x^*,$$

其中s_1和t_1是适当的两个非负整数。

最后，我们来证明序列$\{x_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$收敛于 x^*。对于任意的非负整数 s，$s\leqslant b-1$，由于映射A^s映射收敛序列为收敛序列和$A^{nb}x_0$（即x_{nb}）趋于 x^* $(n\to+\infty)$，那末序列

$$x_{nb+s}=A^s(A^{nb}x_0)\to A^sx^*=x^*\ (n\to+\infty\text{时}).$$

既然b个子序列x_{nb+s} $(0\leqslant s\leqslant b-1)$都收敛于 x^*，那末原来的序列x_n也收敛于x^*。定理证完。

现在，我们来讨论k个子序列的情况，这里k是大于2的任一自然数。它也有相应的结论。

定理2　假设A是$Hausdorff$空间$(S,\ \tau)$中映收敛序列为收敛序列的映射。如果存在k个自然数$a_1,\ a_2,\ \cdots a_k$，它们的最大公约数

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k)=1,$$

使得对于初始元$x_0\in(S,\ \tau)$，经逐次叠代

$$x_n=Ax_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

而得到的k个子序列

$$x_0,\ x_{a_1},\ x_{2a_1},\ \cdots,\ x_{ia_1},\ \cdots,$$
$$x_0,\ x_{a_2},\ x_{2a_2},\ \cdots,\ x_{ia_2},\ \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_0,\ x_{a_k},\ x_{2a_k},\ \cdots,\ x_{ia_k},\ \cdots,$$

在拓扑空间$(S,\ \tau)$中都分别收敛，那末序列$\{x_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$必收敛于方程

$$Ax=x$$

的一个解。

证　对每一个j，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，设子序列

$$x_0,\ x_{a_j},\ x_{2a_j},\ \cdots,\ x_{ia_j},\ \cdots$$

极限为x^*_j。仿照前一定理的证明，不难得到所有的x^*_j $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$都相同，记它为x^*。

其次，根据同一理由可证得

$$A^{a_1}x^*=x^*,\ A^{a_2}x^*=x^*,\ \cdots,\ A^{a_k}x^*=x^*.$$

根据〔1〕中第十一章§2的定理2，对于充分大的N，它必可表为$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$的线性型

$$s_1a_1+s_2a_2+\cdots+s_ka_k,$$

这里$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_k$是k个非负整数。

于是对于充分大的自然数s，由$A^{sa_1}x^*=x^*$得

$$Ax^*=A(A^{sa_1}x^*)=A^{sa_1+1}x=A^{s_1a_1+s_2a_2+\cdots+s_ka_k}x^*=A^{s_1a_1+s_2a_2+\cdots+s_{k-1}a_{k-1}}x^*$$
$$=\cdots=x^*.$$

这就是说x^*是映射A的一个不动点。

关于序列$\{x_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$收敛于x^*的证明与上一定理完全一样，只需去证明a_1个子序列x_{na_1+s} $(s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a_1-1)$都收敛于$x^*$，就立即推出$x_n$ $(n\to+\infty)$收敛x^*。定理证完。

参 考 文 献

〔1〕 华罗庚，数论导引，科学出版社，(1975).

〔2〕 Köthe, G., Topological vector spaces I, Springer, New York (1983).

A Remark on Method of Successive Substitution in Hausdorff Space

Zhang Shangtai

Abstract

Let A is a mapping which maps the Hausdorff topological space (S,τ) into itself, and satisfying a condition

$$x_m \to x\ (m \to +\infty) \text{ always implies } Ax_m \to Ax.$$

Consider the sequence

$$x_n = Ax_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

where x_0 is some initial element. In this remark the following theorem is proved:

Theorem 1. If there exist two natural numbers a, b, $(a,\ b)=1$, such that

$$x_{ia} \to x^*_1\ (i \to +\infty),\quad x_{jb} \to x^*_2\ (j \to +\infty),$$

then the sequence x_n converges to a solution x^* of the equation $Ax = x$.

国家教委直属高等工業院校“高等工程教育理论讨论会”在我校举行

国家教育委员会直属高等工业院校教育研究协作组“第一次高等工程教育理论讨论会”于二月十九日至三月三日在我校隆重举行。参加讨论会有协作组成员：清华大学、天津大学、大连工学院、上海交通大学、西安交通大学、同济大学、华东化工学院、华南工学院、浙江大学、华中工学院、重庆大学、南京工学院、成都科技大学、华侨大学，有厦门大学，以及福州大学、福建建筑专科学校等工业院校。除上述院校的校长、教务处长、高等教育研究所(室)的负责人参加会议外，还邀请国内知名的教育专家、教授、学者顾明远教授(北京师大)、潘懋元教授(厦门大学)林钟敏副教授(厦门大学和原高教二司司长刘一凡同志等到会作专题学术报告。

这次理论讨论会的内容：(1)探讨高等工程教育的基本理论；(2)讨论高等工程教育基本理论问题的研究提纲(草案)及近期理论研究的计划(草案)；(3)交流高等工程教育的办学经验；(4)研究高等工程教育的改革措施；(5)讨论关于加强理论队伍建设等重大课题。

参加会议的还有国家教育委员会高教二司副司长王冀生，副处长张笛梅和省高教厅高教研究室负责人陈祖兴以及《高等工程教育研究》杂志副主编李汉育等。

我校副校长、教务处长和高教研究室负责人等参加了会议。

柯丽珍