第7卷 第2期
1986年5月
华侨大学学报
JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY
Vol.7 No.2
May 1986

解非线性组的L步Newton-AOR方法

蔡火萤

（应用数学系）

摘　　要

本文把L步Newton-SOR方法作为特例，提出一个求解非线性方程组的方法，作者称为L步Newton-AOR方法．同时，讨论此方法以及它在求解一类非线性方程组的收敛性．

一、引　　言

1978年，A·Hadjidimos在[1]中提出一个迭代求解线性代数方程组的AOR方法(Accelerated Overrelaxation Method)，并在方程组的系数矩阵为不可约弱对角占优、L-矩阵和相容有序矩阵的条件下，讨论此方法的收敛性．1983年，陈培贤在[2]中，讨论AOR方法在方程组的系数矩阵是H-矩阵、正定矩阵等的条件下的收敛性．1985年，曾文平在[3]中，讨论AOR方法在方程组的系数矩阵为更一般些的情况下的收敛性，他们都是讨论用AOR方法求解线性代数方程组的问题．本文提出一个求解非线性方程组的方法，我们称之为Newton-AOR方法。它把L步Newton-SOR方法作为特例[4]。此外，我们还讨论了L步Newton-AOR方法在求解一类非线性方程组的收敛性。

二、AOR方法

令$A=D-L-U$是一个n阶实矩阵，其中D为非奇异对角线矩阵，L和U分别是严格的下、上三角矩阵．迭代求解线性代数方程组

$$Ax=b \tag{2.1}$$

的AOR方法定义为：

$$(D-rL)x_{k+1}=\{(1-w)D+(w-r)L+wu\}x_k+wb,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{2.2}$$

其中，r，$w\neq0$为实参数．(2.2)式的迭代矩阵是

$$L_{r,w}=(D-rL)^{-1}\{(1-w)D+(w-r)L+wu\} \tag{2.3}$$

显然，当$r=w$时，AOR方法就是SOR方法。

本文1985年11月21日收到。

三、L 步 Newton-AOR 方法的建立

对于所给非线性组

$$F(x)=0 \tag{3.1}$$

适当选取初值 x_0，我们可以得出求解非线性组(3.1)的 Newton 迭代程序

$$x_{k+1}=x_k-DF(x_k)^{-1}F(x_k) \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{3.2}$$

为了避免求逆矩阵，我们引入记号

$$A_k=DF(x_k) \qquad\qquad b_k=A_kx_k-F(x_k)$$

则(3.2)可以写成

$$A_kx_{k+1}=b_k,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{3.3}$$

今将矩阵 A_k 作如下分解

$$A_k=B_k-C_k$$

其中，B_k 是非奇异矩阵，然后对 Newton 方程组(3.3)采用如下的迭代格式求解

$$x_{k,m}=H_kx_{k,m-1}+B_k^{-1}b_k \qquad m=1,2,\cdots \tag{3.4}$$

其中，$H_k=B_k^{-1}C_k, x_{k,0}=x_k$，今将迭代(3.4)停止于第 L 步，并记 $x_{k+1}=x_{k,L}$，便得到求解非线性方程组(3.1)的 L 步混合迭代程序

$$\begin{aligned}&x_{k,0}=x_k\\&x_{k,m}=H_kx_{k,m-1}+B_k^{-1}b_k \qquad m=1,2,\cdots,L\\&x_{k+1}=x_{k,L} \qquad\qquad k=0,1,2,\cdots\end{aligned} \tag{3.5}$$

今利用递推关系将(3.5)写成

$$x_{k+1}=x_k-(H_k^{L-1}+H_k^{L-2}+\cdots+H_k+I)B_k^{-1}F(x_k)$$
$$k=0,1,2,\cdots \tag{3.6}$$

现在将 Newton 方程组(3.3)的系数矩阵作如下分解

$$A_k=D_k-L_k-U_k$$

其中，D_k 为对角线矩阵，并且假设非奇异，L_k 为严格下三角矩阵，u_k 为严格上三角矩阵，又记

$$B_k=\frac{1}{\omega}(D_k-rL_k)$$

$$C_k=\frac{1}{\omega}\Big[(1-\omega)D_k+(\omega-r)L_k+\omega u_k\Big]$$

$\omega\neq0$，r 与 ω 皆为实参数

此时，$B_k-C_k=A_k$，再记

$$H_k(\omega,\ r)=(D_k-rL_k)^{-1}[(1-\omega)D_k+(\omega-r)L_k+\omega u_k]$$

于是得到求解 Newton 方程组(3.3)的 AOR 迭代程序

$$x_{k,m}=H_k(w,r)x_{k,m-1}+B_k^{-1}b_k \qquad m=1,2,3,\cdots \tag{3.7}$$

今将求解 Newton 方程组(3.3)的 AOR 方法的迭代程序(3.7)停止于第 L 步，并记 $x_{k,0}=x_k$，$x_{k+1}=x_{k,L}$，便得到求解非线性方程组(3.1)的 L 步 Newton-AOR 方法

$$x_{k,0}=x_k$$
$$x_{k,m}=H_k(w,r)x_{k,m-1}+B_k^{-1}b_k \qquad m=1,2,3,\cdots$$
$$x_{k+1}=x_{k,L} \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{3.8}$$

今利用递推法将(3.8)写成:

$$x_{k+1}=x_k-w(H_k^{L-1}(w,r)+\cdots+H_k(w,r)+I)$$
$$\cdot(D_k-rL_k)^{-1}F(x_k) \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{3.9}$$

当 $r=\omega$ 时，L 步 *Newton-AOR* 方法就变成 L 步 *Newton-SOR* 方法，当 $r\neq w$，$L=1$，$F(x)=Ax-b$，则 L 步 *Newton-AOR* 方法就变成求解线性代数方程组

$$Ax=b$$

的 *AOR* 方法。

四、L 步 Newton-AOR 方法的收敛性分析

引理 1　若非线性方程组(3.1)有解 $x^*\in D$，且 $F(x):D\subset R^n\to R^n$ 在 x^* 处可微，又知 $A(x):D\subset R^n\to R^{n\times n}$ 于 x^* 连续，且 $A(x^*)$ 非奇异，则存在球

$$D_0=\{x\mid\|x-x^*\|<\delta_0\}\subset D$$

使向量值函数

$$\Phi(x)=x-A(x)^{-1}F(x)$$

在球 D_0 中适定，且在 x^* 处可微，导数为

$$D\Phi(x^*)=I-A(x^*)^{-1}DF(x^*)$$

其中 I 为单位矩阵

证明　因为 $A(x)$ 在 x^* 处非奇异，所以 $det(A(x^*))\neq0$，又知 $A(x)$ 在 x^* 处连续，从而 $det(A(x))$ 也在 x^* 处连续，所以存在球

$$D_1=\{x\mid\|x-x^*\|<\delta_1\}\subset D$$

使在球 D_1 中，$det(A(x))\neq0$，即矩阵 $A(x)$ 在球 D_1 中有逆矩阵，于是函数

$$\Phi(x)=x-A(x)^{-1}F(x)$$

在球 D_1 中有定义，其次，因 $A(x)$ 在 x^* 处连续，所以存在球

$$D_2=\{\mid\|x-x^*\|<\delta_2\}\subset D$$

使在球 D_2 中成立关系式

$$\|A(x)-A(x^*)\|\leqslant\varepsilon$$

今取 $\delta_3=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，并在球

$$D_3=\{x\mid\|x-x^*\|<\delta_3\}\subset D$$

中考虑关系式

$$\|A(x)^{-1}\|-\|A(x^*)\|^{-1}\leqslant\|A(x)^{-1}-A(x^*)^{-1}\|$$
$$\leqslant\|A(x)^{-1}\|\|A(x)-A(x^*)\|\|A(x^*)^{-1}\|$$

今记 $\beta=\|A(x^*)^{-1}\|$，取 $\varepsilon=1/2\beta$，便可推知在球 D_3 中成立关系式

$$\|A(x)^{-1}\|\leqslant2\beta$$

因为 $F(x)$ 在 x^* 处可微，所以存在球

$$D_4 = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta_4\} \subset D$$

使在球 D_4 中成立关系式

$$\|F(x) - F(x^*) - DF(x^*)(x - x^*)\| \leqslant \varepsilon \|x - x^*\|$$

记 $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$，且作球

$$D_0 = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta_0\} \subset D$$

并在球 D_0 中考虑关系式

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(x) - \Phi(x^*) - (I - A(x^*)^{-1}DF(x^*))(x - x^*)\| \\
&= \|x - A(x)^{-1}F(x) - x^* - (x - x^*) + A(x^*)^{-1}DF(x^*)\cdot(x - x^*)\| \\
&= \|-A(x)^{-1}F(x) + A(x^*)^{-1}DF(x^*)(x - x^*)\| \\
&\leqslant \|-A(x)^{-1}[F(x) - F(x^*) - DF(x^*)(x - x^*)]\| \\
&+ \|A(x^*)^{-1}DF(x^*)(x - x^*) - A(x)^{-1}DF(x^*)(x - x^*)\| \\
&\leqslant 2\beta\cdot\varepsilon\|x - x^*\| + 2\beta^2\cdot\varepsilon\|DF(x^*)\|\|x - x^*\| \\
&= (2\beta\varepsilon + 2\beta^2\varepsilon\|DF(x^*)\|)\|x - x^*\|
\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性，可以 $\Phi(x)$ 在 x^* 处可微，并且

$$D\Phi(x^*) = I - A(x^*)^{-1}DF(x^*)$$

引理 1 证毕。

引理 2 若非线性组(3.1)有解 $x^* \in D$，且 $F(x): D \subset R^n \to R^n$ 在 x^* 处可微，其次 $A(x): D \subset R^n \to R^{n\times n}$ 在 x^* 处连续，且 $A(x^*)$ 非奇异，又设

$$\rho(I - A(x^*)^{-1}DF(x^*)) < 1$$

则存在一个球

$$D_0 = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta_0\} \subset D$$

使从任意点 $x_0 \in D_0$ 出发，经过迭代程序

$$x_{k+1} = x_k - A(x_k)^{-1}F(x_k)$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots$$

所产生的迭代点列 $\{x_k\} \subset D_0$ 收敛于 x^*

证明 由引理 1 知，存在球

$$D_1 = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta_1\} \subset D$$

使向量值函数

$$\Phi(x) = x - A(x)^{-1}F(x)$$

在球 D_1 中适定，在 x^* 处可微，并且

$$D\Phi(x^*) = I - A(x^*)^{-1}DF(x^*)$$

又知，$F(x^*) = 0$，所以 $x^* = \Phi(x^*)$。即方程

$$x = \Phi(x)$$

有解 x^*，且 $\Phi(x)$ 在 x^* 处可微，同时

$$\rho(D\Phi(x^*)) < 1$$

由简单迭代法的收敛性定理知，命题成立。

定理 1 设 x^* 为非线性组(3.1)的解，$F(x): D \subset R^n \to R^n$ 于球

$$D_0 = \{x \mid \|x - x^*\| < \delta_0\} \subset D$$

上连续可微，记

$$DF(x)=\bar{D}(x)-L(x)-U(x)$$

其中，$\bar{D}(x)$为 $DF(x)$的对角元所构成的对角线矩阵，$L(x)$ 为严格下三角矩阵，$u(x)$ 为严格上三角矩阵，并设 $\bar{D}(x^*)$非奇异，令

$$H(x,w,r)=[\bar{D}(x)-rL(x)]^{-1}[(1-w)\bar{D}(x)+(w-r)L(x)+wu(x)]$$

$w>0$，w，r皆为实数

则当

$$\rho(H(x^*,w,r))<1$$

时，存在一个球

$$D_1=\{x|\,\|x-x^*\|<\delta_1\}\subset D_0$$

使从任意点 $x_0\in D_1$ 出发，经过 L 步 Newton-AOR 程序

$$x_{k+1}=x_k-w[H^{L-1}(x_k,w,r)+\cdots+H(x_k,w,r)+I][\bar{D}(x_k)-rL(x_k)]^{-1}F(x_k)$$

$$k=0,1,2,\cdots \tag{4.1}$$

所产生的迭代点列 $\{x_k\}\subset D_1$收敛于 x^*。

证明　由于 $DF(x)$在 x^* 处连续，故 $\bar{D}(x)$、$L(x)$和 $u(x)$亦在 x^* 处连续，今设

$$B(x,w,r)=\frac{1}{\omega}(\bar{D}(x)-rL(x))$$

$$C(x,w,r)=\frac{1}{\omega}((1-\omega)\bar{D}(x)+(\omega-r)L(x)+\omega u(x))$$

$$\omega>0 \tag{4.2}$$

则　$$B(x,\omega,r)-C(x,\omega,r)=DF(x)$$

且 $B(x,\omega,r)$ 和 $C(x,\omega,r)$ 亦在 x^* 处连续，又 $\bar{D}(x^*)$ 非奇异，$L(x^*)$ 为严格下三角矩阵，故 $B(x^*,\omega,r)$亦非奇异，于是存在一个球

$$D_2=\{x|\,\|x-x^*\|<\delta_2\}\subset D_0$$

使得 $B(x,\omega,r)^{-1}$ 在球 D_2 中适定，在 x^* 处连续，因

$$\begin{aligned}H(x,\omega,r)&=B(x,\omega,r)^{-1}C(x,\omega,r)\\&=(\bar{D}(x)-rL(x)^{-1}[(1-\omega)\bar{D}(x)+(\omega-r)L(x)+\omega u(x)]\end{aligned}$$

故 $H(x,\omega,r)$在 x^* 处连续，今考虑

$$\begin{aligned}&I-H^L(x^*,\omega,r)\\&=[I-H(x^*,\omega,r)][I+H(x^*,\omega,r)+\cdots+H^{L-1}(x^*,\omega,r)]\end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $\rho(H(x^*,\omega,r)<1$，所以$[I-H^L(x^*,\omega,r)]$非奇异，因此(4.3)右边的两个矩阵$[I-H(x^*,\omega,r)]$和$[I+H(x^*,\omega,r)+\cdots+H^{L-1}(x^*,\omega,r)]$亦非奇异，又因矩阵 $H(x,\omega,r)$ 在 x^* 处连续，可知矩阵

$$A(x,\omega,r)=B(x,\omega,r)[I+H(x,\omega,r)+\cdots+H^{L-1}(x^*,\omega,r)]^{-1}$$

在 x^* 处连续，非奇异，从而 $A(x^*,\omega,r)^{-1}$ 存在，由引理 1 知存在球

$$D_3=\{x|\,\|x-x^*\|<\delta_3\}\subset D_2$$

使函数

$$\Phi(x,\omega,r)=x-A(x,\omega,r)^{-1}F(x)$$

在球 D_3 中适定，在 x^* 处可微，并且

$$D\Phi(x^*,\omega,r)=I-A(x^*,\omega,r)^{-1}DF(x^*)$$
$$=I-[I+H(x^*,\omega,r)+\cdots+H^{L-1}(x^*,\omega,r)]B(x^*,\omega,r)^{-1}\cdot DF(x^*)$$
$$=H^L(x^*,\omega,r)$$

由于 $\rho(H(x^*,\omega,r))<1$，所以 $\rho(D\Phi(x^*,\omega,r))<1$，由引理2，存在球 $D_1\subset D_3$，使定理成立。

五、一类可以用 Newton-AOR 方法求解的非线性方程组

定理 2 若非线性组

$$Ax+\Phi(x)=0 \tag{5.1}$$

有解 x^*，其中 A 是一个对称正定矩阵，且 $\Phi(x):D\subset R^n\to R^n$ 在球

$$D_0=\{x|\ \|x-x^*\|<\delta_0\}\subset D$$

中连续可微，且 $D\Phi(x^*)$ 是一个非负对角线阵，则当

$0\leqslant r<\omega<2$ 或 $r\geqslant 0$，$\omega+\dfrac{2-\omega}{\mu}<r<\omega<2$，$\mu=\min\limits_i\{\mu_i\}$，$\mu_i$ 是 $B=I-D^{-1}A$ 的特征值　　(5.2)

时，存在一个球

$$D_1=\{x|\ \|x-x^*\|<\delta_1\}\subset D_0$$

使从任意点 $x_0\in D_1$ 出发，经过 L 步 *Newton-AOR* 迭代所产生的迭代点列 $\{x_k\}\subset D_1$ 收于 x^*

证明 设 $A=D-L-u$，其中 D 为对角线矩阵，L 和 u 分别为严格下、上三角矩阵，以 A 为系数矩阵的线性方程组，采用 *AOR* 方法求解，在条件 (5.2) 下收敛[2]，所以 *AOR* 的迭代矩阵的谱半径小于1，此外又知，非线性方程组(5.1)的 *Newton* 方程组的系数矩阵在极限情况下为 $A+D\Phi(x^*)$，它也是一个对称正定矩阵，因此以它为系数矩阵的线性方程组，采用 *AOR* 方法迭代收敛，从而它的迭代矩阵

$$(D+D\Phi(x^*)-rL)^{-1}[(1-\omega)(D+D\Phi(x^*))+(\omega-r)L+\omega u]$$
$$=B(x^*,\omega,r)^{-1}C(x^*,\omega,r)$$
$$=H(x^*,\omega,r)$$

的谱半径小于1，即 $\rho(H(x^*,\omega,r))<1$，由定理1知，命题成立。

参 考 文 献

〔1〕A. Hadjidimos, Accelerated Overrelaxation Method, Math. Comp., 32, 141(1978).
〔2〕陈培贤，AOR 方法的收敛性，计算数学，5, 1(1983), 66—71.
〔3〕曾文平，关于 AOR 方法的收敛性，华侨大学学报，6, 1(1985).
〔4〕冯果忱，解非线性方程组的松弛性，吉林大学自然科学学报，2(1963).

L-Step Newton-AOR Method of solving Systems of Nonlinear Equations

Cai Huoying

Abstract

In[1], A. Hadjidimos proposed an iterative method of solving systems of linear equations-AOR method. In this paper, we have given a new iterative method of solving systems of nonlinear equations, and discussed its convergence. we call it L-step Newton-AOR Method. The L-step Newton-SOR Method previously used is regarded just as a special case of the one mentioned above. Here, we have further proved the convergence about solving a class of systems of nonlirear equations.