

# 用根轨迹法研究考毕兹振荡电路

王 少 雄

(精密机械工程系)

## 摘 要

本文用根轨迹法研究考毕兹振荡电路,证明其根轨迹为部份共轭双曲线和部份负实轴;导出振荡频率、自激条件、平衡条件和稳定条件;研究电路参数对极点位置、根轨迹形状以及电路性能的影响。

## 一、 引 言

用根轨迹法研究振荡现象,是近代振荡理论的一个方面,所谓根轨迹,是指增益由零变到无限大时,闭环系统特征方程根的轨迹。当开环的零极点确定以后,闭环的根轨迹也就确定了。根轨迹法可以形象地看出振荡器的起振过程和平衡、稳定机理,更为宝贵的是它指明为了使振荡器达到预计的性能,开环零极点位置应如何变动,电路参数应如何调整。文〔2〕、〔3〕介绍二阶一零系统的根轨迹法,本文研究的考毕兹电路也称电容三点式振荡电路,属反馈式振荡电路,是个三阶无零系统。我们将以增益为参数,根据开环零极点位置,作其闭环根轨迹、证明它们是部份共轭双曲线和部份负实轴,然后利用根轨迹法求出振荡频率、自激条件、平衡条件。最后详细讨论电路参数变化对极点位置、根轨迹形状以及电路性能的影响。

## 二、考毕兹电路及其 Y 参数等效电路

图1为用晶体管作有源器件的考毕兹振荡电路。 $LC_1C_2$ 组成振荡回路。其 Y 参数交流等效电路如图2所示。其中:

$g_{ie}$ —晶体管共发射极输入电导;

$C_{ie}$ —晶体管共发射极输入电容;

$g_{oe}$ —晶体管共发射极输出电导;

$C_{oe}$ —晶体管共发射极输出电容;

$y_{fe}$ —晶体管共发射极正向传输导纳。

本文 1985 年 8 月 16 日收到。

振荡器工作时(即闭环状态),  $\dot{U}_f = \dot{U}_i$

令

$$C_1' = C_1 + C_{oe}$$

$$C_2' = C_2 + C_{ie}$$

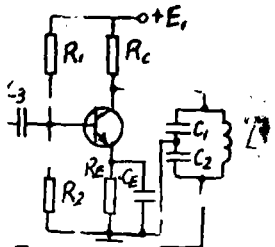


图 1

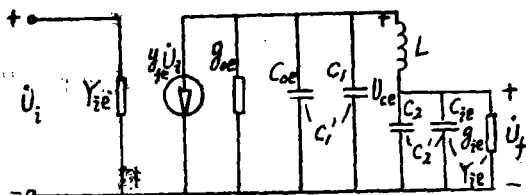


图 2

### 三、开环传递函数及其零极点

开环传递函数  $T(S) = U_f(S)/U_i(S)$ .

在交流等效电路中含有三个独立含源元件  $C_1 C_2 L$ , 因此有三个极点。当  $S \rightarrow \infty$  时每个含源元件的运算阻抗均会使输出电压  $U_f$  等于零, 因此不含数值有限的零点。也就是说开环状态的电路为零三极系统。

由交流等效电路可得,

$$U_{oe}(S) = -y_{fe} U_i \cdot \frac{1}{g_{oe} + SC_1' + \frac{1}{SL + \frac{1}{g_{ie} + SC_2'}}}$$

$$U_f(S) = \frac{U_{oe}(S)}{SL + \frac{1}{g_{ie} + SC_2'}} \cdot \frac{1}{g_{ie} + SC_2'}$$

开环传递函数  $T(S)$ , 也称回归比,

$$T(S) = \frac{U_f(S)}{U_i(S)} = \frac{-y_{fe} \cdot \frac{1}{g_{ie} + SC_2'}}{\left( g_{oe} + SC_1' + \frac{1}{SL + \frac{1}{g_{ie} + SC_2'}} \right) \cdot \left( SL + \frac{1}{g_{ie} + SC_2'} \right)}$$

经演算可得,

$$T(S) = \frac{-y_{fe}}{LC_1' C_2' S^3 + (LC_1' g_{ie} + LC_2' g_{oe}) S^2 + (C_1' + C_2' + L g_{ie} g_{oe}) S + g_{ie} + g_{oe}} \quad (1)$$

从  $T(S)$  的表达式也可以看出开环状态的电路为零三极系统。

$T(S)$  的特征方程为,

$$S^3 + \frac{C_1' g_{ie} + C_2' g_{oe}}{C_1' C_2'} S^2 + \frac{C_1' + C_2' + L g_{ie} g_{oe}}{LC_1' C_2'} S + \frac{g_{ie} + g_{oe}}{L C_1' C_2'} = 0 \quad (2)$$

可写为

$$S^3 + aS^2 + bS + d_1 = 0, \quad \text{其中:}$$

$$a = \frac{C'_1 g_{ie} + C'_2 g_{oe}}{C'_1 C'_2},$$

$$b = \frac{C'_1 + C'_2 + L g_{ie} g_{oe}}{L C'_1 C'_2},$$

$$d_1 = \frac{g_{ie} + g_{oe}}{L C'_1 C'_2}.$$

令  $S = Z - \frac{a}{3}$ , 则特征方程进一步变为

$$Z^3 + pZ + q_1 = 0$$

其中:

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$

$$q_1 = \frac{2}{27} a^3 - \frac{ab}{3} + d_1$$

解方程可得:

$$Z_1 = M_1 + N_1$$

$$Z_2 = -\frac{1}{2}(M_1 + N_1) + j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_1 - N_1)$$

$$Z_3 = -\frac{1}{2}(M_1 + N_1) - j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_1 - N_1)$$

注意  $S = Z - \frac{a}{3}$ , 则有:

$$S_1 = M_1 + N_1 - \frac{a}{3}$$

$$S_2 = -\frac{1}{2}(M_1 + N_1) - \frac{a}{3} + j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_1 - N_1)$$

$$S_3 = -\frac{1}{2}(M_1 + N_1) - \frac{a}{3} - j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_1 - N_1)$$

(3)

其中:

$$M_1 = \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$N_1 = \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{q_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

(4)

对于一般实际电路,  $q_1$  总是大于零. 证明如下:

$$q_1 = \frac{2}{27} a^3 - \frac{ab}{3} + d_1$$

因为

所以

$$a = \frac{C'_1 g_{ie} + C'_2 g_{oe}}{C'_1 C'_2} \approx \frac{g_{ie}}{C'_2}$$

又

$$b = \frac{C'_1 + C'_2 + L g_{ie} g_{oe}}{L C'_1 C'_2} \approx \frac{C'_1 + C'_2}{L C'_1 C'_2}$$

$$d_1 = \frac{g_{ie} + g_{oe}}{L C'_1 C'_2} \approx \frac{g_{ie}}{L C'_1 C'_2}$$

则

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + d_1 \\ &\approx \frac{2}{27}a^3 + \frac{g_{ie}}{LC_1C_2'} - \frac{1}{3} \cdot \frac{g_{ie}}{C_2'} \cdot \frac{C_1' + C_2'}{LC_1C_2'} \\ &= \frac{2}{27}a^3 + \frac{g_{ie}}{LC_2'} \left( \frac{1}{C_1'} - \frac{C_1' + C_2'}{3C_1'C_2'} \right) \\ &= \frac{2}{27}a^3 + \frac{g_{ie}}{LC_2'} \cdot \frac{2C_2' - C_1'}{3C_1'C_2'} \end{aligned}$$

实际电路的反馈系数  $F = \frac{C_1'}{C_2'}$  约为 0.01~0.5,

即  $C_2' > C_1'$ , 所以  $q_1 > 0$ .

而对一般实际电路有  $p > 0$ . 下面先以  $p > 0$  进行讨论, 而对于  $p \leq 0$  的情况, 本文的最后一部份还要详细研究.

因为  $q_1 > 0, \quad p > 0$

从  $M_1$  和  $N_1$  的表达式可知:

$$\begin{aligned} M_1 &> 0, & N_1 &< 0, \\ M_1 - N_1 &> 0, & M_1 + N_1 &< 0 \end{aligned}$$

该电路处开环状态时是稳定的, 故开环极点的实部均应为负值. 因此三个开环极点,  $S_1$  为负实数,  $S_2$  为  $S_3$  为实部为负的共轭复数. 图 3 标出它们在复平面上的位置.

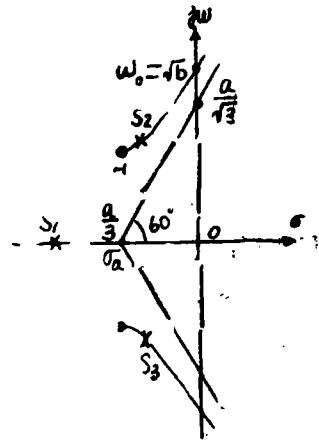


图 3

#### 四、闭环传递函数及其根轨迹

设  $K_v(S)$  为基本放器的增益, 则闭环传递函数  $K_{vf}(S) = \frac{K_v(S)}{1 - T(S)}$

闭环特征方程  $1 - T(S) = 0$

因为

$$T(S) = \frac{-y_{fe}}{LC_1C_2'S^3 + (LC_2'g_{oe} + LC_1'g_{ie})S^2 + (C_1' + C_2' + Lg_{ie}g_{oe})S + g_{ie} + g_{oe}}$$

所以闭环特征方程变为

$$LC_1C_2'S^3 + (LC_2'g_{oe} + LC_1'g_{ie})S^2 + (C_1' + C_2' + Lg_{ie}g_{oe})S + g_{ie} + g_{oe} + y_{fe} = 0$$

可见闭环特征方程与开环特征方程比较, 只是常数项多了一项  $y_{fe}$ .

经变换可得

$$S^3 + \frac{C_1'g_{ie} + C_2'g_{oe}}{C_1'C_2'}S^2 + \frac{C_1' + C_2' + Lg_{ie}g_{oe}}{LC_1C_2'}S + \frac{g_{ie} + g_{oe} + y_{fe}}{LC_1C_2'} = 0 \quad (5)$$

可写为

$$S^3 + aS^2 + bS + d_2 = 0$$

其中

$$a = \frac{C_1'g_{ie} + C_2'g_{oe}}{C_1'C_2'}$$

$$b = \frac{C'_1 + C'_1 + Lg_{te}g_{oe}}{LC'_1C'_2}$$

$$d_2 = \frac{g_{te} + g_{oe} + y_{fe}}{LC'_1C'_2}$$

令  $S = Z' - \frac{a}{3}$ , 则闭环特征方程变为

$$Z'^3 + pZ' + q_2 = 0$$

其中

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$

$$q_2 = \frac{2}{27} a^3 - \frac{ab}{3} + d_2$$

$y_{fe}$  变化时则  $q_2$  跟着变化;  $y_{fe} = 0$ ; 则  $q_2 = q_1$ . 对实际电路,  $q_2 > q_1 > 0$ .

解闭环特征方程可得:

$$Z'_1 = M_2 + N_2$$

$$Z'_2 = -\frac{1}{2}(M_2 + N_2) + j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_2 - N_2)$$

$$Z'_3 = -\frac{1}{2}(M_2 + N_2) - j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_2 - N_2)$$

注意  $S = Z - \frac{a}{3}$ , 则有:

$$\left. \begin{aligned} S'_1 &= M_2 + N_2 - \frac{a}{3} \\ S'_2 &= -\frac{1}{2}(M_2 + N_2) - \frac{a}{3} + j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_2 - N_2) \\ S'_3 &= -\frac{1}{2}(M_2 + N_2) - \frac{a}{3} - j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_2 - N_2) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ N_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

下面讨论  $p > 0$  时,  $y_{fe}$  由零逐渐增大, 闭环传递函数特征方程根的轨迹.

开环传递函数(回归比)  $T(S)$  存在三个极点, 没有数值有限的零点, 由文献[1]的根轨迹作图法可知:

(1) 根轨迹始于开环极点, 终于开环零点. 因此该闭环系统存在伸往无限远的三条根轨迹. 其渐近线也为三条.

(2) 三条渐近线会交于一点并落在实轴上, 其交点坐标为  $\sigma_a = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} = -\frac{a}{3}$

(3) 渐近线倾斜角为  $\theta$

$$\theta = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

即  $\theta_1 = 60^\circ, \quad \theta_2 = 180^\circ, \quad \theta_3 = 300^\circ$

(4) 实轴上只有一个开环极点  $S_1$ , 故  $S_1$  左边的负实轴即为一条根轨迹. 它与  $\theta = 180^\circ$

的渐近线重合。

另外两条根轨迹是共轭双曲线的一部份, 证明如下:

$$S_1' = -\frac{1}{2}(M_2 + N_2) - \frac{a}{3} + j\frac{\sqrt{3}}{2}(M_2 - N_2)$$

故此根轨迹的复平面坐标  $(\sigma, j\omega)$  应为:

$$\sigma = -\frac{1}{2}(M_2 + N_2) - \frac{a}{3}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}(M_2 - N_2)$$

经变化可得:

$$(2\sigma + \frac{2}{3}a)^2 - \frac{4}{3}\omega^2 = (M_2 + N_2)^2 - (M_2 - N_2)^2 = 4M_2N_2$$

因为

$$4M_2N_2 = 4\sqrt{\left[-\frac{q_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right]\left[-\frac{q_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right]} = -\frac{4}{3}p$$

所以在复平面上  $S_1'$  的方程为

$$\omega^2 - 3\sigma^2 - 2a\sigma - \frac{a^2}{3} - p = 0 \quad (8)$$

对于一般二次方程  $AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$ ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} \neq 0 \quad \delta = B^2 - 4AC > 0, \text{ 其曲线为双曲线.}$$

$$\text{对于 } S_1' \text{ 的方程 } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -2a \\ 0 & -2a & -2\left(p + \frac{a^2}{3}\right) \end{vmatrix} = 24p > 0, \quad \delta = 12 > 0,$$

所以  $S_1'$  为双曲线。

$S_1'$  与  $S_2'$  共轭, 故  $S_2'$  也为双曲线。

图 3 画出三条根轨迹  $S_1'S_2'S_3'$  及其渐近线。根轨迹的起点即开环极点  $S_1S_2S_3$ , 对应于  $y_{fe} = 0$ 。随着  $y_{fe}$  的增大,  $S_1'$  沿负实轴延伸,  $S_2'S_3'$  以双曲线形状延伸。 $y_{fe}$  的变化在方程中反映为  $q_1$  变化。

注意, 开环极点  $S_2$ , 并不是双曲线  $S_2'$  的顶点  $H$ 。由  $S_2'$  的方程 (7) 可以求得, 顶点  $H$  的坐标应为  $(-\frac{a}{3}, j\sqrt{p})$ , 它是曲线  $S_2'$  的最低点, 顶点  $H$  对应于  $q_2 = 0$ , 要求  $y_{fe}$  为负值, 不是电路可能的状态。

## 五、振荡频率、自激条件、平衡条件和稳定条件

### (一) 振荡频率 $\omega_0$

从零极点的观点看, 振荡频率即根轨迹与虚轴交点决定的频率。虚轴上的极点反映恒定

振幅的正弦振荡。

令  $S = j\omega_0$  代入闭环特征方程 (4), 即

$$(j\omega_0)^3 + \frac{C'_1 g_{ie} + C'_2 g_{oe}}{C'_1 C'_2} (j\omega_0)^2 + \frac{C'_1 + C'_2 + L g_{ie} g_{oe}}{L C'_1 C'_2} (j\omega_0) + \frac{g_{ie} + g_{oe} + y_{fe}}{L C'_1 C'_2} = 0$$

方程左边虚、实两部均应为零, 即

$$\begin{aligned} j\omega_0 \cdot \frac{C'_1 + C'_2 + L g_{ie} g_{oe}}{L C'_1 C'_2} - \omega_0^2 \cdot j\omega_0 &= 0 \\ -\omega_0^2 \cdot \frac{C'_1 g_{ie} + C'_2 g_{oe}}{C'_1 C'_2} + \frac{g_{ie} + g_{oe} + y_{fe}}{L C'_1 C'_2} &= 0 \end{aligned}$$

由虚部为零解得振荡频率  $\omega_0$ ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C'_1 + C'_2 + L g_{ie} g_{oe}}{L C'_1 C'_2}} = \sqrt{b} \quad (9)$$

因为  $C' + C'_2 \gg L g_{ie} g_{oe}$ , 令  $C = \frac{C'_1 C'_2}{C'_1 + C'_2}$ , 则

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{C'_1 + C'_2}{L C'_1 C'_2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

由实部为零解得  $y_{fe}$  (对晶体管的要求)

$$y_{fe} = \omega_0^2 (C'_1 g_{ie} + C'_2 g_{oe}) \cdot L - g_{ie} - g_{oe}$$

$\omega_0$  由公式 (9) 代入则可得:

$$y_{fe} = \frac{C'_1}{C'_2} g_{ie} + \frac{C'_2}{C'_1} g_{oe} + L g_{ie} g_{oe} \left( \frac{g_{ie}}{C'_2} + \frac{g_{oe}}{C'_1} \right)$$

由式 (9) 可见, 振荡频率决定于电路元件参数, 主要决定于  $L$ 、 $C$ 。

## (二) 自激条件

从零极点的观点看, 振荡器的自激条件就是使  $S$  的右半平面存在闭环共轭复数极点的条件。

在推导自激频率时我们得到闭环极点落在虚轴时  $y_{fe}$  的数值, 显然为使闭环极点通过虚轴移往  $S$  平面的右半边必须

$$y_{fe} > \frac{C'_1}{C'_2} g_{ie} + \frac{C'_2}{C'_1} g_{oe} + L g_{ie} g_{oe} \left( \frac{g_{ie}}{C'_2} + \frac{g_{oe}}{C'_1} \right) \quad (10)$$

由图 3 可见,  $S_1 S_2$  为开环极点, 对应  $y_{fe} = 0$ , 随着  $y_{fe}$  的增大, 共轭复数的闭环极点  $S'_1 S'_2$  由  $S_1 S_2$  出发往虚轴靠近, 当  $y_{fe}$  满足 (9) 式时,  $S'_1 S'_2$  将越过虚轴移到复平面  $S$  的右半平面, 满足起振条件。由此可进一步看出, 开环共轭极点  $S_1 S_2$  负实部的绝对值越小, 即  $S_1 S_2$  越靠近虚轴, 对起振的  $y_{fe}$  要求越小, 越易起振。

## (三) 平衡条件

振荡器起振时, 反馈信号大于输入信号, 振荡不断加强。随着振幅的增大, 晶体管进入非线性状态,  $y_{fe}$  变小致使反馈信号与输入信号之比  $T(\omega)$  变小。当反馈信号与输入信号相等时, 振荡器进入平衡状态。从零极点的观点看问题, 每一组极点  $S'_1 S'_2 S'_3$  是  $T(S) = 1$  的解, 对应于由特定  $y_{fe}$  值决定的特定电路状态。当  $S'_1 S'_2$  的实部为正值, 则振荡振幅将不断增大, 当  $S'_1 S'_2$  的实部为负值, 则振荡振幅将不断减小。要使振荡平衡, 必须使  $S'_1 S'_2$  落在虚轴上, 即  $S'_2 = j\omega_0$ ,  $S'_1 = -j\omega_0$ 。因此平衡条件为:

$$T(j\omega_0) = 1 \quad (11)$$

#### (四) 稳定条件

所谓振荡器稳定,是指由于外部扰动使振荡器离开原平衡状态,而扰动消失后,振荡器又能自动恢复到原平衡状态。稳定条件包括振幅稳定条件和频率稳定条件。

##### (1) 振幅稳定条件:

闭环根轨迹与虚轴交点为  $j\omega_0$ , 振荡器工作于  $\omega_0$  频率上。设外部扰动使得输入端  $dU_i > 0$ , 则振幅将增大。要使振荡器的振幅能稳定, 必须使极点由  $j\omega_0$  点移向  $S$  平面左边, 即使极点的实部为负, 这样才能在扰动消失后振幅衰减恢复到原数值。对于我们讨论的电路, 从根轨迹看, 要使极点由虚轴移向左半平面, 必须使  $dy_f < 0$ 。因此振幅稳定条件为:

$$\frac{dy_f}{dU_i} < 0 \quad (12)$$

振荡电路中的晶体管工作于非线性状态, 是具有这种特性的。

##### (2) 频率稳定条件:

首先我们注意到  $T(j\omega_0) = \frac{\dot{U}_f}{\dot{U}_i}$ , 即回归比的相角反映反馈信号  $\dot{U}_f$  为原输入信号  $\dot{U}_i$  的相位差。因为  $S_1 S_2 S_3$  为开环  $T(S)$  的极点, 由式(1)可得

$$T(j\omega_0) = \frac{-Y}{(j\omega_0 - S_1)(j\omega_0 - S_2)(j\omega_0 - S_3)}$$

其中  $Y$  为系数。

$$\text{设 } \angle j\omega_0 - S_1 = \varphi_1 \quad \angle j\omega_0 - S_2 = \varphi_2 \quad \angle j\omega_0 - S_3 = \varphi_3$$

则回归比的相角

$$\angle T(j\omega_0) = \Psi = 180^\circ - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$$

现在来讨论频率稳定条件, 设由于外部扰动使振荡频率由  $\omega_0$  变到  $\omega'$ ,  $\Delta\omega = \omega' - \omega_0 > 0$ , 如要求频率稳定, 则回归比的相角应变小, 即要求  $\Delta\Psi < 0$ , 反馈信号滞于原输入信号, 只有这样才能使扰动消失后, 频率恢复到值  $\omega_0$ 。因此频率稳定条件为  $\frac{\Delta\Psi}{\Delta\omega} < 0$ 。

在根轨迹法中, 频率稳定条件可表示为: 当  $\Delta\omega > 0$  时, 开环零极点到  $\omega_0$  的向量的幅角增量代数和为负值。零点到  $\omega_0$  向量幅角的增量冠以正号, 极点到  $\omega_0$  向量幅角的增量冠以负号。

在所研究的考毕兹电路中, 没有数值有限的零点。由图4可见, 当  $\Delta\omega > 0$  时  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  均变大, 因此  $\Delta\Psi < 0$ , 满足频率稳定条件。即

$$\frac{d\Psi}{d\omega} = \frac{-d(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}{d\omega} < 0 \quad (13)$$

由图4还可以看出,  $S_1 S_2$  实部绝对值越小, 也即  $S_2 S_3$  越靠近虚轴, 则由  $d\omega$  引起的  $d\varphi_2 + d\varphi_3$  越大, 频率稳定性越好。  $S_1$  比  $S_2 S_3$  离虚轴远,  $d\omega$  引起的  $d\varphi_1$  较小, 对频率稳定性的影响不如  $S_2 S_3$  大。

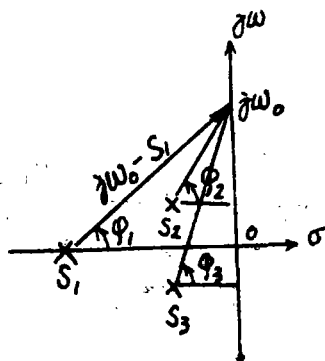


图 4



## 六、电路参数变化对开环极点位置及根轨迹形状的影响

### (一) 电感 $L$ 改变的情况

当  $C_1' C_2'$  以及晶体管的  $g_{te} g_{oe}$  固定, 则  $a = (C_1' g_{te} + C_2' g_{oe}) / C_1' C_2'$  就被确定, 从而根轨迹的渐近线的位置就被确定。当  $L$  改变时由式 (9) 可知  $\omega_0 = [(C_1' + C_2' + L g_{te} g_{oe}) / LC_1' C_2']^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = \omega_0^2$ ,  $p = b - \frac{a^2}{3}$  也跟着改变。分以下几种情况进行分析。

(1)  $L$  不太大使得  $\omega$  及  $b$  足够大, 满足  $p = b - \frac{a^2}{3} > 0$ , 这种情况的三个开环极点位置及三条根轨迹在上面已详细讨论过并画在图 3。现重画于图 5(a) 以利比较。提出注意的一点是渐近线与虚轴的交点坐标为  $j \frac{a}{\sqrt{3}}$ , 根轨迹与虚轴的交点是  $j\omega_0 = j\sqrt{b}$ ,  $p = b - \frac{a^2}{3} > 0$ , 说明  $\sqrt{b} - \frac{a}{\sqrt{3}} > 0$ , 即根轨迹与虚轴的交点坐标大于渐近线与虚轴交点的坐标, 根轨迹在渐近线的上方。

(2) 增加  $L$  使  $b$  减小, 满足  $p = b - \frac{a^2}{3} = 0$

对于根轨迹  $S_2'$  的方程 (8),  $\angle = 24p = 0$ ,  $\delta = 12 > 0$ , 由文 (6) 可知  $S_2'$  为直线。同理  $S_3'$  也为直线。下面将要证明, 对于这种情况, 三个开环极点在渐近线上, 三条根轨迹与渐近线重合如图 5(b) 所示。

由式 (4) 可知, 由于  $p = 0$ , 所以  $M_1 = 0$ ,  $N_1 = -\sqrt[3]{q_1}$ 。把它们代入式 (3) 可求得三个开环极点为

$$S_1 = -\sqrt[3]{q_1} - \frac{a}{3}$$

$$S_2 = \frac{\sqrt[3]{q_1}}{2} - \frac{a}{3} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{q_1}$$

$$S_3 = \frac{\sqrt[3]{q_1}}{2} - \frac{a}{3} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{q_1}$$

从式 (4) 可以看出, 随着  $p$  的减小并趋于零,  $M_1$  将变小,  $N_1$  将变大, 而  $M_2$  的变化较  $N_1$  变化大, 故  $S_2 S_3$  的实部绝对值将随着  $p$  的减小而变小, 开环极点往虚轴靠拢。

设  $S_2$  与  $\sigma_a$  连线与实轴的夹角为  $\theta'$ ,

则

$$\tan \theta' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{q_1}}{\frac{\sqrt[3]{q_1}}{2}} = \sqrt{3} \quad \theta' = 60^\circ$$

故  $S_2$  在渐近线上。同理  $S_3$  也在渐近线上。  $S_1$  为负实数, 也在另一条渐近线上。

由式 (7) 可知, 由于  $p = 0$ , 所以  $M_2 = 0$ ,  $N_2 = -\sqrt[3]{q_2}$ 。把它们代入式 (6) 可得三条根轨迹方程

$$S'_1 = -\sqrt[3]{q_2} - \frac{a}{3}$$

$$S'_2 = \frac{\sqrt[3]{q_2}}{2} - \frac{a}{3} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{q_2}$$

$$S'_3 = \frac{\sqrt[3]{q_2}}{2} - \frac{a}{3} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{q_2}$$

当  $y_{fe} = 0$  时则  $q_2 = q_1$ ,  $S'_2 = S_2$ , 随着  $y_{fe}$  的增大,  $q_2$  增大, 但  $S'_2$  与  $\sigma_a$  连线与实轴夹角始终为  $60^\circ$ , 故  $S'_2$  为直线而且与渐近线重合。同理  $S'_1 S'_3$  也是与渐近线重合的射线。

$$(3) L \text{ 再增大使得 } p = b - \frac{a^2}{3} < 0, \text{ 但 } \frac{q_1^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

由式 (3) 可见三个开环极点仍然是两个实部为负的共轭复数。与  $p \geq 0$  的情况相比较, 共轭极点实部的绝对值变小, 开环共轭极点进一步往虚轴靠拢。另外要注意的是开环极点相对于渐近线的位置已发生变化, 如  $S_2$  在渐近线下方。

对于根轨迹  $S'_2$  的方程 (8),  $\Delta = 24p \neq 0$ ,  $\delta = 12 > 0$ 。由文献 [6] 可知  $S'_2$  仍为双曲线。同理  $S'_1$  也为双曲线。

$$\text{由于 } p = b - \frac{a^2}{3} < 0, \text{ 所以 } \omega_0 = \sqrt{b} < \frac{\sqrt{a}}{3},$$

即根轨迹与虚轴的交点, 低于渐近线与虚轴的交点, 根轨迹  $S'_2$  在渐近线的下方, 如图 5 (c) 所示。

$$(4) L \text{ 继续增大, } p = b - \frac{a^2}{3} < 0 \text{ 继续减小, 使得 } \frac{q_1^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.$$

这种情况与 (3) 类似, 只是开环极点  $S_2 = S_3$  並落在负实轴上。  $S'_2 S'_3$  仍为双曲线, 根轨迹如图 5 (d) 所示。

$$(5) L \text{ 再继续增大, 使 } \frac{q_1^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

由文 (7) 知道, 开环极点  $S_2 S_3$  为不等的两个负实数。由于式 (8) 的  $\Delta = 24p \neq 0$ ,  $\delta = 12 > 0$ , 故根轨迹  $S'_2 S'_3$  仍为双曲线, 如图 5 (e) 所示。

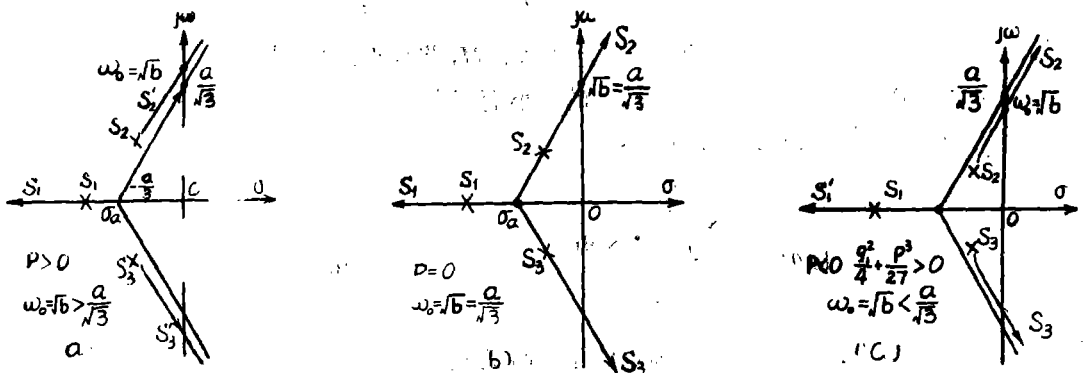


图 5

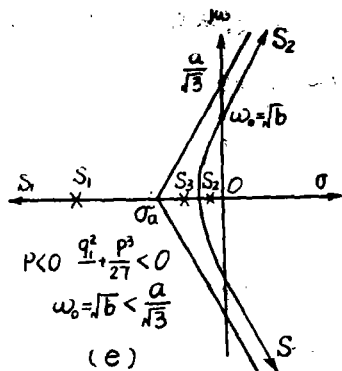
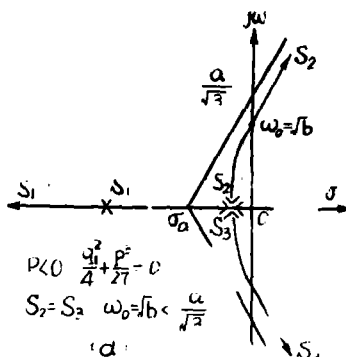


图 5 (续)

### (二) $g_{ie}$ 变化的情况

晶体管共发输入电导  $g_{ie}$  远大于共发输出电导  $g_{oe}$ ，从开环极点表示式 (2) 可知， $g_{ie}$  的影响较  $g_{oe}$  的影响大，下面只讨论  $g_{ie}$  变化引起的影响。在讨论  $L$  变化对根轨迹形状影响时，我们指出由于  $L$  的变化， $a = \frac{C_1' g_{ie} + C_2' g_{oe}}{C_1' C_2'}$  不变，而  $b = \frac{C_1' + C_2' + L g_{ie} g_{oe}}{L C_1' C_2'} \approx \frac{C_1' + C_2'}{L C_1' C_2'}$  变化。 $a$  为常数使得渐近线位置不变，而  $p = b - \frac{a^2}{3} \geq 0$ ，则决定根轨迹或位于渐近线上方，或与渐近线重合，或位于渐近线下方。现在讨论  $g_{ie}$  变化对根轨迹形状影响时也可采用类似的方法。这时  $g_{ie}$  的变化将引起  $a$  的变化，则渐近线与实轴的交点位置将因此发生变化。 $b$  可以近似认为固定，即根轨迹与虚轴的交点可视为不变。由  $p = b - \frac{a^2}{3} \geq 0$  的情况可以决定根轨迹与渐近线的相对位置及根轨迹应有的形状，这里不再详细讨论。

作为一个特例，我们来讨论  $g_{ie} \approx 0$ ， $g_{oe} \approx 0$  的情况。此时  $a = 0$ ， $d_1 = \frac{g_{ie} + g_{oe}}{L C_1' C_2'} = 0$ ， $b = \frac{1}{LC}$  开环传递函数  $T(S)$  的特征方程变为  $S^3 + bS = 0$ ，其三个开环极点值是： $S_1 = 0$ ， $S_2 = +j\sqrt{b}$ ， $S_3 = -j\sqrt{b}$ 。两个共轭极点  $S_2, S_3$  位于虚轴上，反映开环状态即可振荡。这是因为电路没有耗能电阻元件， $C_1' C_2'$  与  $L$  组成谐振电路。从此特例也可以看出，随着  $g_{ie}$  减小， $S_2, S_3$  往虚轴靠近，易于起振。

### (三) $C_1'$ 和 $C_2'$ 改变的情况

从开环传递函数  $T(S)$  的特征方程式 (2) 可见， $C_1'$  或  $C_2'$  改变时对系数  $b$  的影响是相同的，但由于  $g_{ie} \gg g_{oe}$ ，故对系数  $a$  的影响是不同的。

#### (1) $C_1'$ 增大， $C_2'$ 不变：

由于  $C_1'$  增大，系数  $b$  以及  $\omega_0 = \sqrt{b}$  将减小，即根轨迹与虚轴的交点下移。由于  $C_2'$  不变，则  $a = \frac{g_{ie} C_1' + C_2' g_{oe}}{C_1' C_2'} \approx \frac{g_{ie}}{C_2'}$  近似不变，即渐近线位置不变。这与  $L$  增大的情况类似，仍然可根据  $p = b - \frac{a^2}{3} \geq 0$  分三种情况讨论。

(2)  $C'_2$  增大,  $C'_1$  不变:

由于  $C'_2$  增大, 系数  $b$  以及  $\omega_0 = \sqrt{b}$  将减小, 即根轨迹与虚轴的交点下移。同时由于  $C'_2$  增大, 使  $a \approx \frac{g_{10}^2}{C'_2}$  减小, 渐近线与负实轴的交点往右移, 注意到

$$p = b - \frac{a^2}{3} \approx \frac{C'_1 + C'_2}{LC'_1 C'_2} - \frac{1}{3} \frac{g_{10}^2}{C'^2_2} = \frac{3C'_2(C'_1 + C'_2) - LC'_1 g_{10}^2}{3LC'_1 C'^2_2}.$$

可见如  $C'_2$  变化前  $p > 0$ , 则  $C'_2$  的增大,  $p$  将仍然保持大于零。要出现  $p \leq 0$  情况必须使  $C'_2$  减小。

可见, 上述分析明确地给出了振荡电路参数对性能的影响。

本文承上海交通大学宋文涛副教授指导, 作者深表谢意。

### 参 考 文 献

- [1] 绪方胜彦著, 卢伯英等译, 现代控制工程, 科学出版社, (1980)。
- [2] 南京工学院《电子线路》编写组编, 电子线路(第三册第四篇), 人民教育出版社, (1983)。
- [3] 张肃文主编, 高频电子线路(上册第二分册), 人民教育出版社, (1983)。
- [4] [美] P.R. 格雷, R.G. 迈耶著, 周宁华, 陈幼松译, 模拟集成电路的分析与计算, 科学出版社, (1981)。
- [5] T. E. Foltmann, K. L. Hitz, An Introduction to Linear Control Systems, Marcel DEKKER, INC, (1977)。
- [6] 四川矿业学院数学教研组编, 数学手册, (1978)。
- [7] B.N. 斯米尔诺夫著, 孙念增译, 高等数学教程, (1979)。

# A Study on Colpitts' Oscillating Circuit by Root-Locus Methods

Wang Shaoxiong

## Abstract

This paper used Root-Locus methods to study Colpitts' Oscillating Circuit. It proved that root-locus consists of both a part of the lines of conjugata hyperbola and a part of the negative axis. It pushes out oscillatory frequency, Self-oscillatory facility, equilibrium facility, and facility of stability. The study of circuits quantity has an influence upon the position of poles, the form of root-locus, and the properties of circuits.