

α -星象函数之逆函数的 第四项系数估计

刘 增 荣

(应用数学系)

摘 要

本文获得 α -星象函数之逆函数的第四项系数的准确界限。

(一) 引 言

设 $f(z) = z + \dots$ 在单位圆 $|z| < 1$ 上是解析的, 若 $R_{\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha (|z| < 1)$, $0 \leq \alpha < 1$, 则称 $f(z)$ 是 α -星象的, 记之为 $f(z) \in S_{\alpha}^*$.

设 $f(z) \in S_{\alpha}^*$, 其逆函数在 $W = 0$ 处的展式为 $f^{-1}(W) = W + \sum_{k=2}^{\infty} r_k W^k$, 1979年 J. G. Krzyz 等人^[1]证明:

$$|r_2| \leq 2(1-\alpha), \quad (*)$$

$$|r_3| \leq \begin{cases} (1-\alpha)(5-6\alpha), & 0 \leq \alpha < \frac{2}{3}, \\ 1-\alpha, & \frac{2}{3} \leq \alpha < 1, \end{cases} \quad (**)$$

(*) 和 (**) 中的等号是可达的。

本文获得了 $|r_4|$ 的准确界限如下:

定理

$$|r_4| \leq \begin{cases} \frac{2}{3}(1-\alpha)(3-4\alpha)(7-8\alpha), & 0 \leq \alpha \leq 0.6, \\ \frac{4}{3}(3-4\alpha)(7-8\alpha)(2-3\alpha)\sqrt{\frac{2-3\alpha}{5-8\alpha}}, & 0.6 \leq \alpha \leq \alpha_0, \\ \frac{1}{9\sqrt{6}}(11-12\alpha)\sqrt{11-12\alpha}, & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \\ \frac{2}{3}(1-\alpha), & \alpha_1 \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (1)$$

本文 1985 年 6 月 20 日收到。

其中, $\alpha_0 = \frac{35 - \sqrt{33}}{48} = 0.609488278 \dots$ 为方程 $288\alpha^2 - 420\alpha + 149 = 0$ 的根,

$\alpha_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{24}(\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}} + \sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}) = 0.685369255 \dots$ 为方程 $(12\alpha - 11)^3 + 216(\alpha - 1)^2 = 0$ 的根.

不等式(1)中诸等号都是可达的.

(二) 方 法 和 引 理

记 \mathcal{P} 为单位圆 $|z| < 1$ 上形如 $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ 且满足 $\operatorname{Re} p(z) > 0 (|z| < 1)$ 的解析

函数全体所成之族. 由定义, $f(z) \in S_a^*$ 的充要条件是存在 $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{P}$ 使

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \alpha + (1-\alpha)p(z)$$

于上式两边积分, 有

$$\log \frac{f(z)}{z} = (1-\alpha) \int_0^z \frac{p(t)-1}{t} dt. \quad (2)$$

令 $z = f^{-1}(W)$, 则(2)可改写成

$$-\log \frac{f^{-1}(W)}{W} = (1-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} c_k [f^{-1}(W)]^k$$

把上式两边在 $w=0$ 处展开并比较系数, 可得

$$-r_2 = (1-\alpha)c_1, \quad (3)$$

$$-r_3 + \frac{1}{2}r_1^2 = (1-\alpha)(c_1r_2 + \frac{1}{2}c_2), \quad (4)$$

$$-r_4 + r_2r_3 - \frac{1}{3}r_1^3 = (1-\alpha)(c_1r_3 + c_2r_2 + \frac{1}{3}c_3). \quad (5)$$

将(3)和(4)代入(5), 经整理有

$$-r_4 = \frac{8}{3}(1-\alpha)^3 c_1^3 - 2(1-\alpha)^2 c_1^2 c_2 + \frac{1}{3}(1-\alpha)c_3$$

令 $\beta = 2(1-\alpha)$, $0 < \beta \leq 2$, 上式等价于

$$-\frac{6}{\beta}r_4 = 2\beta^2 c_1^3 - 3\beta c_1^2 c_2 + c_3 \equiv g_\beta(c_1, c_2, c_3). \quad (6)$$

由(6)可见, 定理的证明归结为 \mathcal{P} 类函数的系数多项式 $g_\beta(c_1, c_2, c_3)$ ($0 < \beta \leq 2$) 的估计.

对于 $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{P}$, 一个经典的结果是 $|c_k| \leq 2$, $k=1, 2, \dots$. 将此结果应用到 $\frac{1}{p(z)} \in \mathcal{P}$, 便有

引理 1 若 $p(z) \in \mathcal{P}$, 则 $|c_1^3 - 2c_1c_2 + c_3| \leq 2$.

引理 2^[2] 若 $p(z) \in \mathcal{P}$, 则 $|c_3 - c_1c_2| \leq 2$.

引理 3^[3] 设 $\omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k$ 在单位圆 $|z| < 1$ 上是解析的, 且 $|\omega(z)| \leq |z|$ ($|z| < 1$),

则对任何实数 p 和 q , 成立下面准确的不等式

$$|d_3 + p d_1 d_2 + q d_1^3| \leq H(p, q),$$

其中

$$H(p, q) = \begin{cases} 1, & (p, q) \in D_1 \cup D_2, \\ q, & (p, q) \in \bigcup_{k=3}^7 D_k, \\ \frac{2}{3}(|p|+1) \left[\frac{|p|+1}{3(|p|+1+q)} \right]^{\frac{1}{2}}, & (p, q) \in D_8 \cup D_9, \\ \frac{1}{3}q \left(\frac{p^2-4}{p^2-4q} \right) \left[\frac{p^2-4}{3(q-1)} \right]^{\frac{1}{2}}, & (p, q) \in D_{10} \cup D_{11}, \\ \frac{2}{3}(|p|-1) \left[\frac{|p|-1}{3(|p|-1-q)} \right]^{\frac{1}{2}}, & (p, q) \in D_{12}. \end{cases}$$

而

$$\begin{aligned} D_1 &= \{ (p, q) : |p| \leq \frac{1}{2}, -1 \leq q \leq 1 \}, \\ D_2 &= \{ (p, q) : \frac{1}{2} \leq |p| \leq 2, \frac{4}{27}(|p|+1)^3 - (|p|+1) \leq q \leq 1 \}, \\ D_3 &= \{ (p, q) : |p| \leq \frac{1}{2}, q \leq -1 \}, \\ D_4 &= \{ (p, q) : |p| \geq \frac{1}{2}, q \leq -\frac{2}{3}(|p|+1) \}, \\ D_5 &= \{ (p, q) : |p| \leq 2, q \geq 1 \}, \\ D_6 &= \{ (p, q) : 2 \leq |p| \leq 4, q \geq \frac{1}{12}(p^2+8) \}, \\ D_7 &= \{ (p, q) : |p| \geq 4, q \geq \frac{2}{3}(|p|-1) \}, \\ D_8 &= \{ (p, q) : \frac{1}{2} \leq |p| \leq 2, -\frac{2}{3}(|p|+1) \leq q \leq \frac{2}{27}(|p|+1)^3 - (|p|+1) \}, \\ D_9 &= \left\{ (p, q) : |p| \geq 2, -\frac{2}{3}(|p|+1) \leq q \leq \frac{2|p|(|p|+1)}{p^2+2|p|+4} \right\}, \\ D_{10} &= \{ (p, q) : 2 \leq |p| \leq 4, \frac{2|p|(|p|+1)}{p^2+2|p|+4} \leq q \leq \frac{1}{12}(p^2+8) \}, \\ D_{11} &= \left\{ (p, q) : |p| \geq 4, \frac{2|p|(|p|+1)}{p^2+2|p|+4} \leq q \leq \frac{2|p|(|p|-1)}{p^2-2|p|+4} \right\}, \\ D_{12} &= \{ (p, q) : |p| \geq 4, \frac{2|p|(|p|-1)}{p^2-2|p|+4} \leq q \leq \frac{2}{3}(|p|-1) \} \end{aligned}$$

(三) 定理的证明

据 (6), 我们只要对一切 $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{P}$ 求 $\max |g_\beta(c_1, c_2, c_3)|$ ($0 < \beta \leq 2$).

下面对 $\beta \in (0, 2]$ 予分段考虑.

由引理 1 和引理 2 容易得到

引理 4

$$|g_\beta(c_1, c_2, c_3)| \leq \begin{cases} 2, & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ 16\beta^2 - 12\beta + 2, & 1 \leq \beta \leq 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{证 } g_\beta(c_1, c_2, c_3) &= 2\beta^2 c_1^2 - 3\beta c_1 c_2 + c_3 \\ &= 2\beta^2(c_1^2 - 2c_1 c_2 + c_3) + (3\beta - 4\beta^2)(c_3 - c_1 c_2) + (2\beta^2 - 3\beta + 1)c_3 \end{aligned}$$

注意到

$$|3\beta - 4\beta^2| = \begin{cases} 3\beta - 4\beta^2, & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ 4\beta^2 - 3\beta, & 1 \leq \beta \leq 2, \end{cases}$$

及

$$|2\beta^2 - 3\beta + 1| = 2\beta^2 - 3\beta + 1, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq \beta \leq 2$$

便有

$$\begin{aligned} |g_\beta(c_1, c_2, c_3)| &\leq 2\beta^2 |c_1^2 - 2c_1 c_2 + c_3| + |3\beta - 4\beta^2| |c_3 - c_1 c_2| + |2\beta^2 - 3\beta + 1| |c_3| \\ &\leq 4\beta^2 + 2|3\beta - 4\beta^2| + 2|2\beta^2 - 3\beta + 1| \\ &= \begin{cases} 2, & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ 16\beta^2 - 12\beta + 2, & 1 \leq \beta \leq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

下面来考虑 $\frac{1}{2} < \beta < 1$ 的情形.

对任意 $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{P}$, $\frac{p(z)-1}{p(z)+1} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k$ 是一个 Schwarz 函数, 比较系数得

$$c_1 = 2d_1, \quad c_2 = 2(d_2 + d_1^2), \quad c_3 = 2(d_3 + 2d_1 d_2 + d_1^3).$$

简单的计算表明

$$g_\beta(c_1, c_2, c_3) = 2A_\beta(d_1, d_2, d_3),$$

其中

$$A_\beta(d_1, d_2, d_3) \equiv (8\beta^2 - 6\beta + 1)d_1^2 - 2(3\beta - 1)d_1 d_2 + d_3.$$

令 $q = (8\beta^2 - 6\beta + 1)$, $p = -2(3\beta - 1)$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$. 应用引理 3 不难得到

$$D_1 = D_3 = D_4 = D_5 = D_7 = D_{11} = D_{12} = \phi,$$

$$D_6 = \{\beta: 0.8 \leq \beta < 1\},$$

$$D_2 = \{\beta: \frac{1}{2} < \beta \leq \beta_1\},$$

$$D_8 = \{\beta: \beta_1 \leq \beta \leq \frac{2}{3}\},$$

其中 $\beta_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}(\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}} + \sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}) = 0.629261491\cdots$ 是方程 $(6\beta - 1)^3 - 54\beta^2 = 0$ 的根,

$$D_9 = \{ \beta : \frac{2}{3} \leq \beta \leq \beta_0 \},$$

$$D_{10} = \{ \beta : \beta_0 \leq \beta \leq 0.8 \},$$

其中 $\beta_0 = \frac{1}{24}(13 + \sqrt{33}) = 0.781023443\cdots$ 是方程 $72\beta^2 - 78\beta + 17 = 0$ 的根.

计算表明

$$|A_r(d_1, d_2, d_3)| \leq \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < \beta \leq \beta_1, \\ \frac{(6\beta-1)\sqrt{6\beta-1}}{3\sqrt{6}\beta}, & \beta_1 \leq \beta \leq \beta_0, \\ \frac{\sqrt{2}(8\beta^2-6\beta+1)(3\beta-2)}{\beta} \sqrt{\frac{3\beta-2}{4\beta-3}}, & \beta_0 \leq \beta \leq 0.8, \\ 8\beta^2-6\beta+1, & 0.8 \leq \beta \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

注意到 $g_r(c_1, c_2, c_3) = 2A_r(d_1, d_2, d_3)$, 由 (7) 结合引理 4 使得

$$|g_r(c_1, c_2, c_3)| \leq \begin{cases} 2, & 0 < \beta \leq \beta_1, \\ \frac{2(6\beta-1)\sqrt{6\beta-1}}{3\sqrt{6}\beta}, & \beta_1 \leq \beta \leq \beta_0, \\ \frac{2\sqrt{2}(8\beta^2-6\beta+1)(3\beta-2)}{\beta} \sqrt{\frac{3\beta-2}{4\beta-3}}, & \beta_0 \leq \beta \leq 0.8, \\ 16\beta^2-12\beta+2, & 0.8 \leq \beta \leq 2. \end{cases} \quad (8)$$

其中 β_1 和 β_0 的定义如前所述.

据 (6) 及 $\beta = 2(1-\alpha)$, 由 (8) 不难直接推出估计式 (1).

下面来证明 (1) 中诸等号是可达的. 显然, 这等价于证明 (8) 中诸等号是可达的.

令

$$p_1(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

$$p_2(z) = \frac{1+\mu(1+e^{i\theta})z+e^{i\theta}z^2}{1+\mu(1-e^{i\theta})z-e^{i\theta}z^2},$$

其中 $\mu = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{2(3\beta-2)(8\beta^2-6\beta+1)-\beta}{2(4\beta-3)}} \quad (\beta_0 \leq \beta < 0.8)$, 而 θ 是实的, θ 决定于方程

$$\cos \theta = \frac{(3\beta-1)[1-(8\beta^2-6\beta+2)\mu^2]}{2(8\beta^2-6\beta+1)\mu^2} \quad (\beta_0 \leq \beta < 0.8).$$

$$p_3(z) = \frac{1+\frac{\sqrt{6\beta-1}}{\sqrt{6}\beta}z+z^2}{1-z^2}, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_0,$$

$$p_4(z) = \frac{1+z^3}{1-z^3},$$

显见, $0 < \frac{\sqrt{6\beta-1}}{\sqrt{6}\beta} < 2$, $\beta_1 = 0.629\cdots \leq \beta \leq 0.781\cdots = \beta_0$, 故 $p_k(z) \in \mathcal{S}$, $k=1, 3, 4$.

直接验证可知, 函数 $p_4(z)$, $p_3(z)$, $p_1(z)$ 分别使 (8) 中的第一、第二和第四个不等式达到等号.

对于函数 $p_2(z)$, 首先来证

$$0 < 1 - \mu^2 \leq \frac{(3\beta+1)(8\beta^2-6\beta+1)}{(3\beta+1)(8\beta^2-6\beta+1)+3\beta-1} < 1 \quad (\beta_0 \leq \beta < 0.8). \quad (9)$$

因

$$1 - \mu^2 = \frac{(4-5\beta)(8\beta^2-6\beta+1)}{2\beta^2(4\beta-3)},$$

我们只需证明, 当 $\beta \geq \beta_0$ 时成立不等式

$$\frac{4-5\beta}{2\beta^2(4\beta-3)} \leq \frac{3\beta+1}{(3\beta+1)(8\beta^2-6\beta+1)+3\beta-1} \quad (10)$$

事实上,

$$\begin{aligned} & (4-5\beta)[(3\beta+1)(8\beta^2-6\beta+1)+3\beta-1]-2\beta^2(4\beta-3)(3\beta+1) \\ &= 2\beta^2(4-5\beta)(12\beta-5)-2\beta^2(4\beta-3)(3\beta+1) \\ &= -2\beta^2(72\beta^2-78\beta+17) \\ &= -144\beta^2\left(\beta-\frac{13+\sqrt{33}}{24}\right)\left(\beta-\frac{13-\sqrt{33}}{24}\right) \\ &\leq 0, \quad \frac{13+\sqrt{33}}{24} = \beta_0 \leq \beta. \end{aligned}$$

故 (10) 成立, 从而 (9) 成立.

次证

$$-1 \leq \frac{(3\beta-1)[1-(8\beta^2-6\beta+2)\mu^2]}{2(8\beta^2-6\beta+1)\mu^2} \leq 1 \quad (\beta_0 \leq \beta < 0.8) \quad (11)$$

直指计算可知, (11) 中左、右两边的不等式分别等价于

$$3(1-\beta)(8\beta^2-6\beta+1)\mu^2+(3\beta+1)(1-\mu^2) \geq 0, \quad \beta_0 \leq \beta < 0.8$$

和

$$1 - \mu^2 \leq \frac{(3\beta+1)(8\beta^2-6\beta+1)}{(3\beta+1)(8\beta^2-6\beta+1)+3\beta-1}, \quad \beta_0 \leq \beta < 0.8$$

而这两个不等式之成立是显然的.

注意到 $\frac{p_2(z)-1}{p_2(z)+1} = e^{i\theta} z \frac{z+\mu}{1+\mu z} \equiv \omega(z)$, 由 (9), $0 < \mu < 1$, 由 (11), 实数 θ 是存在的, 故 $\omega_2(z)$ 是一个 Schwarz 函数, 或等价地, $p_2(z) \in \mathcal{P}$.

据 $g_\beta(c_1, c_2, c_3) = 2A_\beta(d_1, d_2, d_3)$, 欲证 $p_2(z)$ 使 (8) 中的第三个不等式达到等号, 只要证 $\omega_2(z)$ 使 (7) 中的相应的不等式达到等号. 为此, 我们需要下面的

引理 5 设 a, b, c 为正的实数, $\frac{c|a-b|}{4ab} \leq 1$, 则对任何实数 θ 成立

$$|ae^{i\theta} - be^{-i\theta} - c| \leq (a+b)\sqrt{1 + \frac{c^2}{4ab}},$$

等号成立仅当 θ 满足方程 $\cos \theta = \frac{c(b-a)}{4ab}$,

证

$$\begin{aligned} |ae^{i\theta} - be^{-i\theta} - c|^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos 2\theta - 2ac \cos \theta + 2bc \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab(2\cos^2\theta - 1) + 2c(b-a)\cos \theta \\ &= (a+b)^2 + c^2 - 4ab \cos^2\theta + 2c(b-a)\cos \theta \end{aligned}$$

$$= (a+b)^2 \left(1 + \frac{c^2}{4ab}\right) - 4ab \left[\cos \theta - \frac{c(b-a)}{4ab}\right]^2$$

$$\leq (a+b)^2 \left(1 + \frac{c^2}{4ab}\right). \quad \text{证毕.}$$

现在 $\omega_2(z) = e^{i\theta} z \frac{z+\mu}{1+\mu z} = e^{i\theta} \mu z + e^{i\theta} (1-\mu^2) z^2 - e^{i\theta} \mu (1-\mu^2) z^3 + \dots$. 对此 $\omega_2(z)$ 有

$$|A_p(d_1, d_2, d_3)| = |(8\beta^2 - 6\beta + 1)\mu^3 e^{3i\theta} - 2(3\beta - 1)\mu(1-\mu^2)e^{2i\theta} - \mu(1-\mu^2)e^{i\theta}|$$

$$= \mu |(8\beta^2 - 6\beta + 1)\mu^2 e^{i\theta} - (1-\mu^2)e^{-i\theta} - 2(3\beta - 1)(1-\mu^2)|$$

令 $a = (8\beta^2 - 6\beta + 1)\mu^2$, $b = 1 - \mu^2$, $c = 2(3\beta - 1)(1 - \mu^2)$, 由 (9) 知 $a, b, c > 0$ ($\beta_0 \leq \beta < 0.8$), 而 $\cos \theta = \frac{(3\beta - 1)[1 - (8\beta^2 - 6\beta + 2)\mu^2]}{2(8\beta^2 - 6\beta + 1)\mu^2} = \frac{c(b-a)}{4ab}$,

(11) 表明 $\frac{c|b-a|}{4ab} \leq 1$, 应用引理 5 便得

$$\mu |(8\beta^2 - 6\beta + 1)\mu^2 e^{i\theta} - (1-\mu^2)e^{-i\theta} - 2(3\beta - 1)(1-\mu^2)|$$

$$= \mu [(8\beta^2 - 6\beta + 1)\mu^2 + 1 - \mu^2] \sqrt{1 + \frac{(3\beta - 1)^2(1 - \mu^2)}{(8\beta^2 - 6\beta + 1)\mu^2}}$$

$$= [(8\beta^2 - 6\beta + 1)\mu^2 + 1 - \mu^2] \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{8\beta^2 - 6\beta + 1}(1 - \mu^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(8\beta^2 - 6\beta + 1)(3\beta - 2)}{\beta} \sqrt{\frac{3\beta - 2}{4\beta - 3}}$$

这就证明了 $p_2(z)$ 确使 (8) 中的第三个不等式达到等号.

由 (2), $f(z) = z \exp \left\{ (1-\alpha) \int_0^z \frac{p(t)-1}{t} dt \right\}$. 显见, 若 $p(z)$ 是极值问题

$\max |g_p(c_1, c_2, c_3)|$ 的一个解, 则对任何复数 η ($|\eta| = 1$), $p(\eta z)$ 也然. 因

$$\eta f(\eta z) = z \exp \left\{ (1-\alpha) \int_0^{\eta z} \frac{p(t)-1}{t} dt \right\}$$

$$= z \exp \left\{ (1-\alpha) \int_0^z \frac{p(\eta t)-1}{t} dt \right\}$$

故若 $f(z)$ 是极值问题 $\max |r_4|$ 的一个解, 则 $\eta f(\eta z)$ 也然.

令 $\tilde{p}_2(z) = p_2(-e^{-i\frac{\theta}{2}}z)$, 计算得到

$$\tilde{p}_2(z) = \frac{1 - 2\mu \cos \frac{\theta}{2} z + z^2}{1 + 2i\mu \sin \frac{\theta}{2} z - z^2}$$

$$= \frac{1 - 2\mu \cos \frac{\theta}{2} z + z^2}{(1 + e^{i\frac{\theta}{2}}z)(1 - e^{-i\frac{\theta}{2}}z)}$$

其中实数 ϕ 适合方程 $\sin \phi = \mu \sin \frac{\theta}{2}$. 而

$$\frac{\tilde{p}_2(z) - 1}{z} = 2 \frac{z - \mu e^{i\frac{\theta}{2}}}{(1 + e^{i\frac{\theta}{2}}z)(1 - e^{-i\frac{\theta}{2}}z)}$$

$$= -\frac{1}{\cos \phi} \left(\frac{1}{1 + e^{i\frac{\theta}{2}}z} - \frac{1}{1 - e^{-i\frac{\theta}{2}}z} \right) - \frac{\mu e^{i\frac{\theta}{2}}}{\cos \phi} \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{1 + e^{i\frac{\theta}{2}}z} + \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{1 - e^{-i\frac{\theta}{2}}z} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{(\mu e^{\frac{\theta}{2}} + e^{-i\phi})}{\cos \phi} \left(\frac{e^{i\phi}}{1+e^{i\phi}z} \right) - \frac{(\mu e^{-\frac{\theta}{2}} - e^{i\phi})}{\cos \phi} \left(\frac{e^{-i\phi}}{1-e^{-i\phi}z} \right) \\
 &= -\frac{\mu \cos \frac{\theta}{2} + \cos \phi}{\cos \phi} \left(\frac{e^{i\phi}}{1+e^{i\phi}z} \right) - \frac{\mu \cos \frac{\theta}{2} - \cos \phi}{\cos \phi} \left(\frac{e^{-i\phi}}{1-e^{-i\phi}z} \right)
 \end{aligned}$$

故

$$\int_0^z \frac{\tilde{p}_2(t)-1}{t} dt = \left(1 + \frac{\mu \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \phi}\right) \log(1+e^{i\phi}z)^{-1} + \left(1 - \frac{\mu \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \phi}\right) \log(1-e^{-i\phi}z)^{-1}$$

令 $x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \phi}\right)$, 易见 $0 < x < 1$. 事实上, 由 $\sin \phi = \mu \sin \frac{\theta}{2}$ 及 $0 < \mu < 1$, 有

$$\frac{\mu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \phi} = \frac{\mu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} < 1.$$

记

$$f_2(z) = z \exp \left\{ (1-\alpha) \int_0^z \frac{\tilde{p}_2(t)-1}{t} dt \right\}, \text{ 我们有}$$

$$f_2(z) = z(1+e^{i\phi}z)^{-2(1-\alpha)x} (1-e^{-i\phi}z)^{-2(1-\alpha)(1-x)},$$

其中实数 θ 适合方程 $\sin \phi = \mu \sin \frac{\theta}{2}$, $x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \phi}\right)$, 据 $\beta = 2(1-\alpha)$ 和 $p_2(z)$ 的定义, 易得

$$\mu = \frac{1}{2(1-\alpha)} \sqrt{\frac{2(2-3\alpha)(3-4\alpha)(7-8\alpha) - (1-\alpha)}{5-8\alpha}}, \quad 0.6 \leq \alpha \leq \alpha_0$$

而 θ 决定于方程

$$\cos \theta = \frac{(5-6\alpha)[1-(32\alpha^2+52\alpha+22)\mu^2]}{2(3-4\alpha)(7-8\alpha)\mu^2-1}, \quad 0.6 \leq \alpha \leq \alpha_0,$$

其中 $\alpha_0 = 1 - \frac{\beta_0}{2} = 0.609488278 \dots$.

综上所述, 易知

$$f_1(z) = z \exp \left\{ (1-\alpha) \int_0^z \frac{p_1(t)-1}{t} dt \right\}$$

$$= z(1-z)^{-2(1-\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

$$f_2(z) = z \exp \left\{ (1-\alpha) \int_0^z \frac{\tilde{p}_2(t)-1}{t} dt \right\}$$

$$= z(1+e^{i\phi}z)^{-2(1-\alpha)x} (1-e^{-i\phi}z)^{-2(1-\alpha)(1-x)}, \quad 0.6 \leq \alpha \leq \alpha_0,$$

$$f_3(z) = z \exp \left\{ (1-\alpha) \int_0^z \frac{\tilde{p}_3(t)-1}{t} dt \right\}$$

$$= z(1+z)^{\frac{\sqrt{1-12\alpha}}{4\sqrt{6}}-(1-\alpha)} (1-z)^{-\frac{\sqrt{1-12\alpha}}{4\sqrt{6}}-(1-\alpha)}, \quad \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1,$$

$$f_4(z) = z \exp \left\{ (1-\alpha) \int_0^z \frac{p_4(t)-1}{t} dt \right\}$$

$$= z(1-z^3)^{-\frac{2}{3}(1-\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

依次证明(1)中四个不等式每一个等号都是可达的. 定理证毕.

参 考 文 献

- [1] J. G. Krzyż, R. J. Libera and E. J. Zlotkiewicz, Coefficients of inverses of regular starlike functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A* 33 (1979) 103—110.
- [2] A. E. Livingston, The coefficients of multivalent closeto-convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21 (1969) 545—552.
- [3] D. V. Prokhorov and J. Szynal, Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions, *Bulletin de L'academie Polonaise des Sciences*, Vol. XXIX, 5—6 (1981), 223—230.

The Fourth Coefficient Estimation for the Inverses of α -Starlike Functions

Liu Zengrong

Abstract

Let S_{α}^* ($0 \leq \alpha < 1$) denote the class of functions $f(z) = z + \dots$ analytic in the unit disk $|z| < 1$ and satisfy $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha$ ($|z| < 1$). Suppose that $f^{-1}(w) = w + \sum_{k=2}^{\infty} r_k w^k$ is the inverse of $f(z) \in S_{\alpha}^*$, the sharp bounds for $|r_k|$ ($k=2, 3$) had been found^[1]. In this note, we give the precise estimation for $|r_4|$.