第7卷 第1期 华侨大学学报 Vol.7 No.1
1986年2月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY Feb. 1986

关于P-群的自同构群的阶

肖长城*

（广西民族学院）

摘要

若p-群G不循环且$|G|>p^2$时有$|G|\,/\,|Aut(G)|$，则称G为LA-群。本文证明若干类p-群为LA-群，并引进DN-群的概念简化论题。

一、前言

p-群的自同构群之阶，其上限已于1933年由*G.Birkhoff*与*p.Hall*解决[1]，而其下限至今仍在探索之中。近年来，人们猜想：任意一个阶大于p^2的非循环p-群G的阶$|G|$整除G的自同构群的阶$|\mathrm{Aut(G)}|$。文献〔2〕把适合这个猜想的p-群叫做LA-群。

Otto[3]首先证明交换p-群是LA-群，又证明若p-群G为PN-群B与交换群p的直积，且$|B|\,\big|\,|Aut(B)|$，则$|G|\,\big|\,|Aut(G)|$。(PN-群是指没有非平凡交换直积因子的非交换p-群)。这一结果指出，要证明猜想成立，只要证明所有的PN-群是LA-群。于是*Otto*接着证明若G是$ECF(m,n,p)$型PN-群，其中$n\geqslant m>3$，则$|G|\,\big|\,|Aut(G)|$。G是$ECF(m,n,p)$型，指G是p^n阶$m-1$类p-群，G/G_2初等交换，且$|Gi/Gi_{+1}|=P(i=2,3,\cdots m-1)$，其中$G_i$是下中心列的第$i$项)。又证明猜想对中心$Z$为初等交换(设$|Z|=p^r$)且满足下述任一条件的$p^n$阶$PN$-群$G$也成立：(1) $r\geqslant n/2$；(2) $p^r\geqslant|Z_2/Z|$；(3)若G的幂零类$m\geqslant3$，则$n+1-2r\leqslant m$。

后来*Faudree*[4]、*Davitt*[5]先后证明了幂零类$2p$-群与p-交换p-群都是LA-群。*Davitt*与*Otto*[6][7][8]还陆续证明了具有非平凡亚循环中心商群的p-群($p>2$)，非交换模p-群($p>2$)及满足$|G:Z|\leqslant p^4$的p-群都是LA-群。

Exarchakos[2]证明了下述几类p-群G是LA-群：(1) G的下中心列商因子$L_i/L_{i+1}=p^r$ ($r>0,i=1,\cdots,C-1$)，且$e\times pG/L_1\leqslant|Z|$；(2) G中存在一个最大类的正规子群M满足(i)G/M初等交换或(ii)M在G中的指数为p^2；(3) G的一个极大子群M含有阶为p的正规子群H，而M/H有最大类。并且证明了*Frattini*子群$\Phi(G)$循环的p-群G是上述第1类p-群因而是LA-群，还推得最大类p-群是LA-群。

本文首先应用上述一部分结果证明，含p^{n-1}阶元的p^n阶群与某些极大子群的中心循环的p-群是LA-群；接着证明含较大交换直积因子的p-群、含较大初等交换中心的p-群及中

本文1985年7月20日收到。

* 作者系本校数学系62级毕业生，现为广西民族学院数学系讲师。

心商群的阶$\leqslant p^{2(r+1)}$的某些p-群都是LA-群，并引进DN-群的概念及给出DN-为LA-群的一些充分条件。

下文以$H\leqslant G$与$H<G$分别表示H是G的子群与真子群。$\langle a, b, \cdots\rangle$表示由$a,b,\cdots$生成的群，$G=G_1<G_2<\cdots<G_{c+1}=1$表示$G$的下中心列，其中$C$为$G$的幂零类，$C_G(A)$表示$A$在$G$里的中心化子，$G\cong H$表示$G$与$H$同构，$A_c(G)$表示群$G$的中心自同构群，还有一些符号用到时再说明。

二、猜想成立的某些条件

本节命题1可用文献〔2〕的结果推出，这里用另一方法证之。

命题 1 如果p^n阶群$G(n>2)$含p^{n-1}阶元，则G是LA-群。

证 因交换p-群是LA-群[3]，以下只要证G非交换的情况。

（一） $p>2$时，$G=\langle a,b\rangle$，$a^{p^{n-1}}=b^p-1$，$b^{-1}ab=a^{1+p^{n-2}}$ [9]。

取G中任意二元$u=b^sa^t, v=b^xa^y$，可以算出其换位子

$$u^{-1}v^{-1}uv=a^{[(1+p^{n-2})^x-1]t-[(1+p^{n-2})^s-1]y},$$

而 $$[(1+p^{n-2})^x-1]t-[(1+p^{n-2})^s-1]y=p^{n-2}\cdot k,\ k \text{ 为整数。}$$

于是 $$u^{-1}v^{-1}uv=(a^{p^{n-2}})^k,$$

即G的任一换位子都是$a^{p^{n-2}}$的幂，故$G_2\leqslant(a^{p^{n-2}})$。但$G_3<G_2$，而$|(a^{p^{n-2}})|=p$，故$G_3=1$。因此$G$为幂零类$2p$-群，由文〔4〕有$|G|\mid|Aut(G)|$。

（二） $p=2$时，G只能有以下四种类型[9]：

（Ⅰ） $G=\langle a,b\rangle$，$a^{2^{n-1}}=b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{-1}$（二面体群D_{2^n}，$n\geqslant3$）；

（Ⅱ） $G=\langle a,b\rangle$，$a^{2^{n-1}}=1$，$b^2=a^{2^{n-2}}$，$b^{-1}ab=a^{-1}$（四元数群Q_{2^n}，$n\geqslant3$）；

（Ⅲ） $G=\langle a,b\rangle$，$a^{2^{n-1}}=b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{1+2^{n-2}}$ （$n\geqslant4$）；

（Ⅳ） $G=\langle a,b\rangle$，$a^{2^{n-1}}=b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{-1+2^{n-1}}$ （$n\geqslant4$）；

与(一)的证明同理，(Ⅲ)型为幂零类2群，因而有$|G|\mid|Aut(G)|$。

G为(Ⅰ)型时，$|Aut(G)|=|D_8|=2^n=|G|$(当$n=3$)；$|Aut(G)|=2^{2n-3}$ $|G|=2^{n-3}|G|$（当$n>3$)；G为(Ⅱ)型时，$|Aut(G)|=|S_4|=2^n.3=3|G|$ （当$n=3$)；$|Aut(G)|=2^{2n-3}$ $=2^{n-3}|G|$（当$n>3$)[9]。

因此，G为(Ⅰ)、(Ⅱ)型时都有$|G|\mid|Aut(G)|$。

G为(Ⅳ)型时，假定$ba^t\in Z(G)$，则$ba^t\cdot a=a\cdot ba^t=ba^{-1+2^{n-2}}a^t$，推得$a=a^{-1+2^{n-2}}$，矛盾（注意$n\geqslant4$)，因此$Z(G)$的元素只能为$a$的幂，即$Z(G)\leqslant\langle a\rangle$，因而$Z(G)$循环，故$G$为$PN$-群。又因$a^{-1}b^{-1}ab=a^{-2+2^{n-2}}$，即$a^{-2+2^{n-2}}\in G_2$，故

$$a^2=a^2(a^{2^{n-1}})^{2^{n-4}-1}=(a^{-2+2^{n-2}})^{2(2^{n-4}-1)+1}\in G_2,$$

因而$\langle a^2\rangle\leqslant G_2$，但$\Phi(G)=\langle a^2\rangle\langle b^2\rangle=\langle a^2\rangle$，即有$\langle a^2\rangle\leqslant G_2\leqslant\Phi(G)=\langle a^2\rangle$，

于是$G_2=\Phi(G)$，所以G/G_2初等交换。其次$(a^2)^{-1}b^{-1}a^2b=a^{2^2}$，即$a^{2^2}\in[G_2,G]=G_3$因此

$\langle a^{2^2}\rangle \leqslant G_3$，但$G_3 < G_2$且$\langle a^{2^2}\rangle$为$G_2=\langle a^2\rangle$的极大子群，故$G_3=\langle a^{2^2}\rangle$，

因而$|G_2/G_3|=|\langle a^2\rangle/\langle a^{2^2}\rangle|=2$。归纳假设$G_k=\langle a^{2^{k-1}}\rangle(2<k\leqslant n-1)$，

则因$\langle a^{2^{k-1}}\rangle^{-1}b^{-1}a^{2^{k-1}}b=a^{-2^k}$，即$a^{2^k}\in[G_k,G]=G_{k+1}$，

因此$\langle a^{2^k}\rangle\leqslant G_{k+1}$。但$G_{k+1}<G_k$且$\langle a^{2^k}\rangle$为$G_k=\langle a^{2^{k-1}}\rangle$的极大子群，

故 $G_{k+1}=\langle a^{2^k}\rangle$，因而$|G_k/G_{k+1}|=|\langle a^{2^{k-1}}\rangle/\langle a^{2^k}\rangle|=2$。

因此(Ⅳ)型为$ECF(m,n,p)$型PN-群，$n=m>3$，故$|G|\mid|Aut(G)|$[3]。

命题2 若p-群G中含$Z(G)$的极大子群的中心都循环，则G是LA-群。

证 同命题1的证明，我们只须考虑G非交换的情况。在此情况下$Z(G)$必含于G的某一极大子群H，因而$Z(G)\leqslant Z(H)$。由命题条件推得$Z(G)$循环。

假定$\Phi(G)$不循环，则存在(p,p)型正规子群$A\leqslant\Phi(G)$[10]。而G的元素在A上导出的内自同构群的阶为$|G/C_G(A)|$。但$|Aut(A)|=(p^2-1)(p^2-p)$，故$|G/C_G(A)|\leqslant p$，因此$C_G(A)$或为G或为G的极大子群，若$C_G(A)=G$，则$A\leqslant Z(G)$，循环，不可能，若$C_G(A)$为G的极大子群，则因$C_G(A)$含$Z(G)$，根据命题条件$Z(C_G(A))$循环，但$A\leqslant Z(C_G(A))$，亦矛盾。所以$\Phi(G)$循环，由〔2〕知G是LA-群。

三、非PN-群的P-群

自从文〔3〕证明了某些PN-群是LA-群以后，至今未见有人再继续讨论还有哪些PN-群是LA-群。因此，我们有必要同时考虑不是PN-群的p-群，本节就是借助文〔11〕的结果给出非PN-群的p-群是LA-群的充分条件。

定理1 设p^n阶群$G=H\times K$，其中K交换，则$|Aut(K)||I(G)|\mid|Aut(G)|$。

证 $Aut(K)$的每一个元τ都可以延拓为$Aut(G)$的一个元σ：$hk\to hk\tau$ $(h\in H,k\in K)$，且易证$Aut(K)$的所有元经如此延拓作成与$Aut(K)$同构的$Aut(G)$的一个正规子群，它与G的自同构群$I(G)$的直积作成$Aut(G)$的一个子群。因此$|Aut(K)||I(G)|\mid|Aut(G)|$。

定理1 设p^n阶群$G=H\times K$，其中K交换，$|K|=p^{n_1}$，$|Z(G)|=p^{n_2}$，K的极大循环子群的阶为p^{n_1-i}。则K满足下述条件时，G为LA-群：

(Ⅰ) K的型长$t\neq1$时，$n_1+2(i-1)\geqslant n_2$

(Ⅱ) K的型长$t=1$时，

$n_1+2i-3\geqslant n_2$ （当K不是p^3或p^4阶初等交换群）

$n_1+2(i-2)\geqslant n_2$ （当K是p^3或p^4阶初等交换群）

证 (Ⅰ)根据文〔11〕，$t\neq1$时，$|K|p^{2(i-1)}\mid|Aut(K)|$。故若$n_1+2(i-1)\geqslant n_2$，则有$p^{n_2}\mid p^{n_1+2(i-1)}\mid|Aut(K)|$。由引理1，$p^n=p^{n_2}p^{n-n_2}\mid|Aut(K)||I(G)|\mid|Aut(G)|$。即$G$是$LA$-群。

(Ⅱ)与(Ⅰ)同理可由〔11〕证得。

当定理1中的K初等交换时，$p^{\frac{n_1(n_1-1)}{2}}\mid|Aut(K)|$。运用引理1我们可以得到更强的结果，即

定理 2 设p^n阶群$G=H\times K$，K初等交换，$|K|=p^{n}$，$|Z(G)|=p^{n_2}$，且$\frac{n_1(n_1-1)}{2}\geqslant n_2$，则$G$为$LA$-群。

例如$|Z(G)|=p^{20}$时，由定理1，当K为阶大于等于p^9的初等交换群时，$G=H\times K$为LA-群；而由定理2，只要K为阶大于等于p^7的初等交换群时，$G=H\times K$为LA-群。

四、中心初等交换的P-群

运用上一节及文〔3〕的一些结果，可以得到一般p-群（即非专指PN-群）为LA-群的一些充分条件。特别当p-群的中心初等交换时。

先把文〔3〕的Cor.4.3稍加改进成

定理 2 设p^n阶PN-群G的中心Z是阶为pr的初等交换群，且$r\geqslant\frac{n-2}{2}$，则G为LA-群。

证 若G的幂零类$m\leqslant 2$，由〔3〕与〔4〕G为LA-群。若$m\geqslant 3$，则由引理条件得$n+1-2r\leqslant 3$，因而$n+1-2r\leqslant m$，根据〔3〕，G也为LA-群。

定理 3 设p^n阶群G的中心是阶为p^r的初等交换群，且$r\geqslant\frac{n-1+\sqrt{n-1}}{2}$，则$G$是$LA$-群。

证 只要证明G非交换的情况

由定理条件显然有$r\geqslant\frac{n}{2}$，故若G为PN-群，根据〔3〕定理真。若G不是PN-群，可设$G=B\times P$，其中B是PN-群，P是p^{n_1}阶交换群$(n_1\geqslant 1)$。

由$Z(G)=Z(B)\times P$及定理条件知$Z(B)$与P都初等交换且$|Z(B)|=p^{r-n_1}$。

又因$|B|=p^{n-n_1}$，故若$r-n_1\geqslant\frac{n-n_1-2}{2}$，则由引理2有$|B|\,\big|\,|Aut(B)|$但是根据〔3〕

$$p^{n_1}|Aut(B)|p\,\big|\,|Aut\ (G)|，\text{故}\ |G|=p^{n_1}|B|\,\big|\,|Aut(G)|；\text{若}\ r-n_1<\frac{n-n_1-2}{2}，$$

$$\text{即}\ n>2r-n_1+2，\text{则由定理条件}\ r\geqslant\frac{n-1+\sqrt{n-1}}{2}>\frac{2r-n_1+1+\sqrt{2r-n_1+1}}{2}，$$

推算出$\frac{n_1(n_1-1)}{2}>r$。于是由定理2，G为KA-群。

定理3是在p-群的中心初等交换的条件下发展了文〔8〕的结果，即指出中心较大的p^n阶群是LA-群。例如若G是p^{30}阶群，则由〔8〕得，$|Z(G)|\geqslant p^{26}$时G为LA-群。而当$Z(G)$初等交换时由定理3得，只要$|Z(G)|\geqslant p^{18}$时G就为LA-群。

要用到两个引理：

下面再讨论中心最小的p^n阶群，即中心的阶为p的p-群

定理 3 设p-群G的中心Z初等交换，则Z_2/Z也初等交换。

定理 4 $I(G)\cap A_c(G)\cong Z_2/Z$

其中Z_2/Z是G/Z的中心

引理3的证明：设$gZ\in Z_2/Z$，则对任意$X\in$ ⅁，gZ与xZ的换位子$[gZ,xZ]=Z$，即有

$[g,x]\in Z$，由换位子的性质 $[g^p,x]=[g,x]^p$。但 Z 初等交换，故 $[g,x]^p=1$。推得 $g^p\in Z$，可见 Z_2/Z 中非单位元都是 p 阶元，因而初等交换。

引理4在文〔3〕中已在几处用到，故其证明省略。

定理4　中心的阶为 p 的 p^n 阶群 $G(n>2)$ 若满足下述条件之一时必为 LA-群：

(1) $|Z_2/Z|=p$

(2) Z_2/Z 循环

(3) 设 G/G_2 为 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 型，$|Z_2/Z|=P^r$，则 $k\geqslant r+1$。

证　中心的阶为 p 的 p^n 阶群 $(n>2)$ 是 PN-群，故由〔3〕知，$|Z_2/Z|=P$ 时定理成立。又由引理3知，Z_2/Z 循环必有 $|Z_2/Z|=P$，因而条件(1)或(2)满足时 G 为 LA-群。

再由〔3〕，$|A_c(G)|\geqslant p^c$，其中 $c=1\cdot\sum\limits_{x\geqslant 1}b_x$，而由定理条件(3)得 $\sum\limits_{x\geqslant 1}b_x=k$。另一方面，由引理4 $|A_c(G)\,I(G)|=|A_c(G)|\;|I(G)|/|Z_2/Z|=p^{k+n-1-r}$。又由条件(3)有 $p^n\,\big|\,p^{k+n-1-r}\,\big|\,|Aut(G)|$。故条件(3)满足时 G 也为 LA-群。

五、猜想证明的简化与DN-群

Hummel 在文〔12〕中证明：若 p-群 G 可分解成两个真子群 H 与 A 的中心积（即 $G=HA$，H 中元与 A 中元可交换），A 交换且 $|H|\,\big|\,|Aut(H)|$，则 $|G|\,\big|\,|Aut(G)|$ 有了这一结果就可以把证明所有 p-群都是 LA-群，简化成只要证明所有无交换中心积因子（指非平凡的，下同）的非交换 p-群都是 LA-群。由于无交换中心积因子的非交换 p-群必为 PN-群，而 PN-群不必为无交换中心积因子的 p-群。因此 *Hummel* 这一结果比 *Otto* 的前述结果（见前言）更进一步。*Hummel* 还指出对 p-群 G 来说，G 无交换中心积因子与 G 满足 $Z(G)\leqslant\Phi(G)$ 这两个条件等价。

Hummel 的结果还可以再推进一步。

引理5　若 $G=B_1\times B_2\times\cdots\times Br$，则 $|Aut(B_1)||Aut(B_2)|\cdots|Aut(Br)|\,\big|\,|Aut(G)|$。

只要仿引理1把 $Aut(Bi)$ $(i=1,\cdots,r)$ 延拓后，可以推得 $Aut(B_1)\times Aut(B_2)\times\cdots\times Aut(Br)$ 与 $Aut(G)$ 的一个子群同构，因而证得本引理。

引理6　若 $G=B_1\times B_2\times\cdots\times Br$，且 G 满足极大条件，$Z(G)\leqslant\Phi(G)$，则 $Z(Bi)\leqslant\Phi(Bi)$ $(i=1,\cdots,r)$。

证　由

$$G=B_1\times B_2\times\cdots\times Br \tag{I}$$

得 $Z(G)=Z(B_1)\times Z(B_2)\times\cdots\times Z(Br)$ 与

$$\Phi(G)=\Phi(B_1)\times\Phi(B_2)\times\cdots\times\Phi(Br) \tag{II}$$

若某一 $Z(Bi)\not\leqslant\Phi(Bi)$，不妨设 $Z(B_1)\not\leqslant\Phi(B_1)$，则 $Z(B_1)$ 中存在一元 $z\bar{\in}\Phi(B_1)$。但 $Z(B_1)\leqslant Z(G)\leqslant\Phi(G)$，故 $z\in\Phi(G)$，由(II) $z=z_1z_2\cdots z_r$，其中 $z_i\in\Phi(Bi)$，因而 $z_i\in B_i$。但 $z\in Z(B_1)\leqslant B_1$，故由(I)不得不有 $z_2=z_3=\cdots=z_r=1$，而 $z_1=z\in\Phi(B_1)$，矛盾。故 $Z(B_i)\leqslant\Phi(B_i)$ $(i=1,\cdots,r)$。

任意一个 p-群 G 都可以分解成为无直积因子的诸 p-群的直积，且由引理6若 G 满足

$Z(G)\leqslant\Phi(G)$，则分解出来的直积因子也满足。因此只要能证明满足 $Z(G)\leqslant\Phi(G)$ 且无直积因子的 p–群 G 为 LA–群，则由引理5及引理6，满足 $Z(G)\leqslant\Phi(G)$ 的 p–群 G 都是 LA–群，因而所有 p–群都是LA–群 [12]。

为叙述方便，作如下定义：

定义 G 称为 DN–群，如果 G 是满足 $Z(G)\leqslant\Phi(G)$ 且无直积因子的 p–群。

于是上述结果可以写成

定理 5 若 DN–群是 LA–群，则 p–群都是 LA–群(即前言所述的猜想成立)。

容易证明，中心循环且满足 $Z(G)\leqslant\Phi(G)$ 的 p–群 G 是 DN–群。但是，DN–群不必为中心循环的 p–群，如下例

$$G=(a,b),\ a^{3^3}=b^{3^3}=1,\ b^{-1}ab=a^{4}\text{[13]}。$$

先证明：$Z(G)=\langle a^{3^2}\rangle\times\langle b^{3^2}\rangle$

对任意 $b^s a^t\in G$，若 $s=o$，则有 $b^s a^t\cdot a^{3^2}=a^{3^2}\cdot b^s a^t$。若 $1\leqslant S<3^3$，则 $4^s-1=(4-1)(4^{s-1}+4^{s-2}+\cdots+4+1)=3k$，$k=4^{s-1}+4^{s-2}+\cdots+1$，即$a^{4^s-1}=a^{3^k}$，因此 $a^{4^s3^2}a^{-3^2}=a^{3^2(4^s-1)}=a^{3^{3k}}=1$，即$a^{4^s3^2}=a^{3^2}$，故 $a^{3^2}\cdot b^s a^t=b^s a^{4^s3^2}a^t=b^s v^t.a^{3^2}$，因此 $a^{3^2}\in Z(G)$。

又对任意 $b^s a^t\in G$，因 $4^{3^2}-1=(3+1)^9-1=3^3\bar{k}$，$\bar{k}$为整数，

故$a^{4^{3^2}t}=a^{(4^{3^2}-1)t}a^t=a^{3^3\bar{k}t}a^t=a^t$。因此$b^s a^t.b^{3^2}=b^s b^{3^2}a^{4^{3^2}t}=b^{3^2}.b^s a^t$，于是$b^{3^2}\in Z(G)$。

所以 $Z(G)\geqslant\langle a^{3^2}\rangle\langle b^{3^2}\rangle=\langle a^{3^2}\rangle\times\langle b^{3^2}\rangle$。

其次，对任意 $a^u b^v\in G$，若 u 无 3^2 因子，则$a^{4^{v+1}u}a^{-4^v u}=a^{3u4^v}\neq1$，因而 $a^{4^{v+1}u}\neq a^{4^v u}$。故 $a^u b^v.b=b^{v+1}a^{4^{v+1}u}\neq bb^v a^{4^v u}=b\cdot a^u b^v$，因此 $a^u b^v\bar{\in}Z(G)$。若 V 无 3^2 因子，则由 $4^v-1=(3+1)^v-1=3^v+v.3^{v-1}+\cdots+\frac{v(v-1)}{2}3^2+v.3$ 易证 4^v-1 无3^3因子，故 $a^{4^v-1}\neq1$，即$a^{4^v}\neq a$，故$a\cdot a^u b^v=b^v a^{4^v(u+1)}\neq b^v a^{4^v u}a=a^u b^v\cdot a$，因此$a^u b^v\bar{\in}Z(G)$。

于是，又有 $Z(G)\leqslant\langle a^{3^2}\rangle\times\langle b^{3^2}\rangle$，所以 $Z(G)=\langle a^{3^2}\rangle\times\langle b^{3^2}\rangle$。

但是 $\Phi(G)=\langle a^3\rangle\langle b^3\rangle$，故 $Z(G)\leqslant\Phi(G)$。

下面证 G 无直积因子：

假定 $G=B_1\times B_2$，其中 B_1B_2 非平凡。分两种情况考虑：

1. $|B_1|=|B_2|3^3$。若 $B_i\cap\langle a\rangle=1$ $(i=1或2)$，则 $G=B_i\times\langle a\rangle$，推得 $Z(G)\geqslant\langle a\rangle$，与 $Z(G)=(a^{3^2})\times(b^{3^2})$矛盾，于是 $B_i\cap\langle a\rangle\neq1$ $(i=1、2)$，但又因此推得 $B_1\cap B_2\geqslant\langle a^{3^2}\rangle\neq1$，也不可能。

2. $|B_1|>|B_2|$。则有 $|B_2|<3^3$，因而B_2交换，即 G有交换直积因子，与 $Z(G)\leqslant\Phi(G)$ 矛盾。同理 $|B_1|<|B_2|$ 也不可能。

故 G 是中心不循环的 DN–群。

上例说明中心循环的 DN–群是特殊类型的 DN–群，命题2与定理4证明的 LA–群都是中心循环的 PN–群与 DN–群，而下面两个定理证明的 LA–群则包括中心不循环的一些 DN–群。

定理 6 设 p^n 阶 DN–群 G 的中心是 p^r 阶的初等交换群，$|\Phi(G):Z(G)|\leqslant p^{n-r-\frac{n-2}{r}}$，

且满足下述两个条件之一，则G为LA-群：

（Ⅰ）$\Phi(G)=G_2$

（Ⅱ）G/G_2初等交换。

证　由引理4，$|A_c(G)\cdot I(G)|=|A_c(G)||I(G)|/|Z_2/Z|$。若$|Z_2/Z|=|G/Z|$，则$G$为幂零类2群，因而是$LA$-群[4]。以下设$|Z_2/Z|<|G/Z|$，即有$|Z_2/Z|\leqslant p^{n-r-2}$。于是

$$|A_c(G)I(G)|\geqslant|A_c(G)|p^{n-r}/p^{n-r-2}=p^2|A_c(G)|| \tag{Ⅰ}$$

（Ⅰ）若$\Phi(G)=G_2$，则G/G_2初等交换，且$|G/G_2|=|G/\Phi(G)|=|G/Z(G)|/|\Phi(G)/Z(G)|$。但由定理条件$|\Phi(Z)/Z(G)|\leqslant p^{n-r-\frac{n-2}{r}}$，故$|G/G_2|\geqslant p^{n-r-(n-r-\frac{n-2}{2})}=p^{\frac{n-2}{2}}$。根据〔3〕，$|A_c(G)|=p^A=p^r\sum\limits_{x\geqslant1}bx\geqslant p^{r\cdot\frac{n-2}{r}}=p^{n-2}$。于是由（Ⅰ）$|A_c(G)I(G)|\geqslant p^2p^{n-2}=p^n$；推得$|G|\,\big|\,|A_c(G)I(G)|\,\big|\,|Aut(G)$。

（Ⅱ）根据p-群的性质$\Phi(G)\geqslant G_2$，但G/G_2初等交换，故又有$\Phi(G)\leqslant G_2$。因此$\Phi(G)=G_2$，同（Ⅰ）得证。

定理7　设G为p^n阶DN-群，$|Z_2|\leqslant|G/G_2|$且$e\times pG/G_2\leqslant|Z|$，则$G$为$LA$-群。

证　设$|Z|=p^r$，$|G_2|=p^t$。

由定理条件$|Z_2|\leqslant|G/G_2|$得$|Z_2/Z|\leqslant|G/G_2|/|Z|=p^{n-r-t}$。由引理4，$|A_c(G)I(G)|=|A_c(G)||I(G)|/|Z_2/Z|\geqslant|A_c(G)|p^{n-r}/p^{n-r-t}=p^t|A_c(G)|$。又因$e\times pG/G_2\leqslant p^r$，根据〔3〕，$|A_c(G)|\geqslant p^c=p\sum\limits_{k=1}^{r}kb_k=p^{n-t}$。故有$|A_c(G)I(G)|\geqslant p^tp^{n-t}=p^n$，因此$G$是$LA$-群。

推论　设G为p^n阶DN-群，$|G_2|\leqslant p^2$且$e\times pG/G_2\leqslant|Z|$，则$G$为$LA$-群。

证　因DN-群非交换，故$|G_2|\neq1$。若$|G_2|=p$，则G为幂零类2群，推论真[4]。下面考虑$|G_2|=p^2$的情况：当$|Z_2/Z|=|G/Z|$时，G也为幂零类2群，推论真；当$|Z_2/Z|<|G/Z|$时，则有$|Z_2|\leqslant p^{n-2}$，因而$|Z_2|\leqslant|G/G_2|$，由定理7，推论成立。

定理7与推论中的条件G为DN-群减弱为G为PN-群时也成立。

还有哪些DN-群是LA-群，有待于继续探讨。与此同时也可以考虑非DN-群，我们有

定理8　如果满足$Z(G)\leqslant\Phi(G)$的p-群G可以分解成r个$(r\geqslant2)$ p-群的直积，且$|G/Z(G)|\leqslant p^{2(r+1)}$，则$G$为$LA$-群。

证　设$G=B_1\times B_2\times\cdots\times B_r$，则$Z(G)=Z(B_1)\times Z(B_2)\times\cdots\times Z(B_r)$，因而$|B_1/Z(B_1)||B_2/Z(B_2)|\cdots|B_r/Z(B_r)|=|G/Z(G)|\leqslant p^{2(r+1)}$。

若某一$|B_i/Z(B_i)|>p^4$，则$\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}|B_j/Z(B_j)|<p^{2(r-1)}$。于是必有某一$|B_j/Z(B_j)|<p^2$，由$p$-群的性质知，$B_j$交换。但由定理条件与引理6有$Z(B_j)\leqslant\Phi(B_j)$，矛盾。故$|B_i/Z(B_i)|\leqslant p^4$ $(i=1,2,\cdots,r)$，由〔8〕，$B_1,B_2,\cdots,B_r$都是LA-群，因而由引理5，G是LA-群。

本文承李世余、俞曙霞老师和曹锡华、陈重穆教授的帮助，作者谨此表示感谢。

参考文献

〔1〕G. Birkhoff and P. Hall, On the order of group of automorphism, Trans. Amer. Math. Soc., 39(1936)496—499.

〔2〕T.Exarchakos, LA-groups, J.Math.Soc.Japan, 33, 2(1981), 185—190.

〔3〕A. D. Otto, Central automorphism of a finite p-group, Trans. Amer. Math. Soc., 125(1966), 280—287.

〔4〕R. Faudree, Anote on the automorphism group of a p-gloup, Ploc. Amer. Math. Soc., 19(1968), 1379—1382.

〔5〕R.M.Davitt, The automprphism group of finite p-abelian p-groups, Illinois J.Math., 16(1972), 76—85.

〔6〕R.M. Davitt and A. D. Otto, On the automorphism group of a finite p-group with the central guotient meta-cyclic, Proc. Amer. Math. Soc., 30(1971), 467—472.

〔7〕R.M.Davitt and A.D,Otto, On the automorphism group of a finite modular p-group, proc. Amer. Math.Soc., 35(1972), 399—404.

〔8〕R. M. Davitt, On the automorphism group of a finite p-group with a small central guotient, Can. J. Math., 32(1980)1168—1176.

〔9〕张远达，有限群构造，科学出版社，北京，(1982).

〔10〕徐明耀，有限群讲义，北京大学，(1982).

〔11〕俞曙霞，有限交换P-群的自同构群的阶的几点注记，数学杂志，32(1983), 189—191.

〔12〕K. Hummel, The order of the automorphism group of a central product, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975), 37—40.

〔13〕徐明耀，杨燕昌，有限p-群的半p-交换性和正则性，数学学报，19, 4(1976), 281—285.

The Order of Automrphism of P-Group

Xiao Changcheng

Abstract

P-group G is called LA-group if $|G|\,\big|\,|Aut(G)|$ when G is non-cyclic and $|G|>p^2$. This paper shows that several classes of p-group are LA-groups and introduces the concept of MN-group to simplify the problem.