

# 在P-弱循环矩阵情况下AOR与Jacobi 迭代特征值之间的关系

曾 文 平

(应用数学系)

## 摘 要

本文在 p-弱循环矩阵条件下,给出了 Jacobi 迭代矩阵的特征值  $\mu$  与相应的 AOR 迭代 (Accelerated Overrelaxation Method) 的特征值  $\lambda$  之间的新的关系式。

## (一) 引 言

用迭代法求解线性方程组

$$AX = b \quad (1)$$

时,若将矩阵 A 分解成如下的分块形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pp} \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中假设  $A_{ii} (i=1, 2, \dots, p)$  均为非奇异方阵,又若记  $D = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{pp})$ , 则得到分块的 Jacobi 迭代矩阵  $B = I - D^{-1}A = L + U$ , 其中  $L, U$  为严格的下、上三角矩阵。

一九七八年, A. Hadjidimos 在文 [1] 提出一种 AOR 迭代 (Accelerated Overrelaxation Method), 其迭代矩阵为

$$\mathcal{L}_{\gamma, \omega} = (I - \gamma L^{-1}) \{ (1 - \omega)I + (\omega - \gamma)L + \omega U \} \quad (\omega \neq 0) \quad (3)$$

人们感兴趣当矩阵 B 是 p-弱循环矩阵时,各种迭代矩阵的特征值与 Jacobi 迭代矩阵特征值之间的关系,例如, [2]、[3] 分别讨论了 SOR 迭代、SSOR 迭代与 Jacobi 迭代特征值之间的关系。这里我们利用 [2]、[3] 所给出的行列式不变性,导出了 AOR 迭代矩阵的特征值与 Jacobi 迭代矩阵特征值之间的关系。显然地,这对 AOR 松弛因子的选取将会起重要的作用。

**定义 1** [2] 如果存在一  $n \times n$  置换矩阵 P, 使

本文 1985 年 5 月 9 日收到。

$$RAP^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{1k} \\ A_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{k, k-1} \end{pmatrix}$$

其中对角线上零子矩阵为方阵, 则称  $n \times n$  复矩阵  $A$  为指标  $k (> 1)$  的弱循环矩阵。

## (二) 基 本 结 果 (I)

**引理 1** <sup>[2]</sup> 令  $B = L + U$  为有相容次序的指标  $p$  的弱循环阵, 则对任意复常数  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  有

$$\det \{ \gamma I - \alpha L - \beta U \} = \det \{ \gamma I - (\alpha^{p-1} \beta)^{\frac{1}{p}} (L + U) \} \quad (4)$$

**定理 1** 设分块矩阵  $A$  为相容有序的  $p$  循环阵, 其对角线上子矩阵  $A_{ii} (1 \leq i \leq N)$  非奇。若  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda$  为 AOR 迭代矩阵  $\mathcal{L}_\gamma$ ,  $\omega$  的特征值, 且  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda\gamma + \omega - \gamma \neq 0$ , 而  $\mu$  满足

$$(\lambda + \omega - 1)^p = (\lambda\gamma + \omega - \gamma)^{p-1} \omega \mu^p \quad (5)$$

则  $\mu$  是块 Jacobi 迭代阵  $B = L + U$  的特征值。

反之, 若  $\mu$  为  $B$  的特征值, 且  $\lambda$  满足 (5),  $\lambda\gamma + \omega - \gamma \neq 0$ , 则  $\lambda$  是  $\mathcal{L}_{\gamma, \omega}$  的特征值。

**证明**  $\mathcal{L}_{\gamma, \omega}$  的特征值  $\lambda$  就是它的特征方程

$$\det \{ \lambda I - \mathcal{L}_{\gamma, \omega} \} = 0 \quad (6)$$

的根, 但  $I - \gamma L$  非奇且  $\det(I - \gamma L) = 1$ , 所以

$$\begin{aligned} \det \{ \lambda I - \mathcal{L}_{\gamma, \omega} \} &= \det \{ \lambda I - (I - \gamma L)^{-1} [(1 - \omega)I + (\omega - \gamma)L + \omega U] \} \\ &= \det(I - \gamma L)^{-1} \det \{ \lambda(I - \gamma L) - [(1 - \omega)I + (\omega - \gamma)L + \omega U] \} \\ &= \det \{ (\lambda + \omega - 1)I - (\lambda\gamma + \omega - \gamma)L - \omega U \} \end{aligned} \quad (7)$$

若令

$$\phi(\lambda) \equiv \det \{ (\lambda + \omega - 1)I - (\lambda\gamma + \omega - \gamma)L - \omega U \} \quad (8)$$

则由引理 1 知

$$\phi(\lambda) = \det \{ (\lambda + \omega - 1)I - [(\lambda\gamma + \omega - \gamma)^{p-1} \omega]^{1/p} B \} \quad (9)$$

注意到,  $A$  为  $p$ -循环阵, 故矩阵  $B$ , 从而  $[(\lambda\gamma + \omega - \gamma)^{p-1} \omega]^{1/p} B$  为指标  $p$  的弱循环阵, 则由 [2] 定理 2.4 必有

$$\phi(\lambda) = (\lambda + \omega - 1)^m \prod_{i=1}^m \{ (\lambda + \omega - 1)^p - (\lambda\gamma + \omega - \gamma)^{p-1} \omega \mu_i^p \} \quad (10)$$

其中  $\mu_i$  在  $\gamma' \geq 1$  时都不为 0。

先证定理的第二部分。令  $\mu$  为块 Jacobi 阵  $B$  的特征值, 又令  $\lambda$  满足式 (5)。则  $\phi(\lambda)$  有一因子为 0, 从而  $\phi(\lambda) = 0$ , 因此  $\lambda$  是  $\mathcal{L}_{\gamma, \omega}$  的特征值。

次证定理的第一部分。令  $\omega \neq 0$ , 又令  $\lambda$  是  $\mathcal{L}_{\gamma, \omega}$  的特征值, 从而  $\phi(\lambda) = 0$ , 因此式 (10) 至少有一因子为 0。分两种情况讨论:

(1)  $\mu \neq 0$  且  $\mu$  满足式 (5)。因设  $\lambda\gamma + \omega - \gamma \neq 0$ , 则  $\lambda + \omega - 1 \neq 0$ , 从而对某一  $i$

( $1 \leq i \leq \gamma'$ ) 有

$$(\lambda + \omega - 1)^p = (\lambda\gamma + \omega - \gamma)^{p-1} \omega \mu_i^p \quad (11)$$

其中  $\mu_i$  不为 0。联立 (5) 和 (11) 得

$$(\lambda\gamma + \omega - \gamma)^{p-1} \omega (\mu^p - \mu_i^p) = 0$$

注意到  $\lambda\gamma + \omega - \gamma \neq 0$ ,  $\omega \neq 0$ , 所以  $\mu^p = \mu_i^p$ , 从而

$$\mu = \mu_i e^{2\pi i \gamma' / p} \quad (0 \leq \gamma' < p \text{ 的非负整数})$$

再由矩阵  $B$  的弱循环性质, 由 [2] 定理 2.4 知  $\mu$  也是  $B$  的特征值。

(2)  $\mu = 0$  且满足式 (5)。因  $\lambda\gamma + \omega - \gamma \neq 0$ , 则从式 (9) 得

$$\phi(\lambda) = (-1)^n \{ (\lambda\gamma + \omega - \gamma)^{(p-1)/p} \omega^{1/p} \}^n \det B = 0$$

注意到  $\omega \neq 0$ ,  $\lambda\gamma + \omega - \gamma \neq 0$ , 便有  $\det B = 0$ , 这表明  $\mu = 0$  是  $B$  的特征值。定理证毕。

**推论 1** 在定理 1 的条件下, 当  $\gamma = \omega$  时, 便得 SOR 迭代与 Jacobi 迭代之间的关系式

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu^p \quad (12)$$

这就是 [2] 中定理 4.3 的结果。

### (三) 基本结果 (II)

令  $B_p$  代表可通过置换化成  $p$ -弱循环阵法式的全体矩阵集合。显然, 对于任意  $B \in B_p$  总可分解为  $B = L + U$ , 其中

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ L_{ij} & & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & & U_{ij} \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

分别为严格下、上三角块矩阵。

现定义指标集合  $J_B$  和  $I_B$  为

$J_B = \{j \mid \text{若存在指标 } j \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ 使 } L \text{ 中有子块 } L_{ij} \neq 0\}$

$I_B = \{i \mid \text{若存在指标 } i \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ 使 } U \text{ 中有子块 } U_{ij} \neq 0\}$

**引理 2**<sup>[3]</sup> 对于  $B \in B_p$ ,  $B = (B_{ij})_{p \times p}$ ,  $B_{ij}$  为  $B$  的分块子阵。记  $B_{.i}$  为  $B$  的第  $i$  个“块列” ( $i = 1, 2, \dots, p$ )。对于任意  $\{1, 2, \dots, p\}$  中的子集  $K$ , 设  $K$  的元素个数为  $|K| = k$ , 构造与  $B$  具有相同分块结构的矩阵  $C = (c_{.1}, c_{.2}, \dots, c_{.p})$ , 其中

$$c_{.i} = \begin{cases} B_{.i} & (\text{若 } i \in K) \\ 0 & (\text{若 } i \notin K) \end{cases}$$

则于任意复数  $\alpha, \beta, \gamma$  恒有

$$\det \{ \gamma I - \alpha C - \beta (B - C) \} = \det \{ \gamma I - (\alpha^k \beta^{p-k})^{1/p} B \} \quad (14)$$

由此不难得到如下的

**定理 2** 给定  $n \times n$  矩阵的分块形式 (2), 其中对角线子方阵  $A_{ii}$  ( $1 \leq i \leq p$ ) 非奇异。 $B$  为其相应的 Jacobi 迭代阵, 且  $B = L + U$  为一  $p$ -弱循环阵, 其中  $L, U$  分别为严格下、上分块三角矩阵, 且  $|J_B \cap I_B| = k$ , 又当  $j \in J_B \cap I_B$  时,  $L$  的第  $j$  个块列  $L_{.j} = 0$  如果  $\lambda$  是  $\mathcal{L}_{p, \omega}$  的一个特征值, 且  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda + \omega - 1 \neq 0$ ,  $\mu$  满足



**推论 2** 在定理 2 的条件下, SOR 块迭代的特征值  $\lambda$  与 Jacobi 块迭代的特征值  $\mu$  之间的关系为

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^k \omega^p \mu^p \quad (23)$$

例 1 若

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & & \\ & 0 & B_{23} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & B_{p-1,p} \\ B_{p1} & & & 0 \end{pmatrix}$$

由  $J_B$  和  $I_B$  的定义可知, 此例中

$J_B = \{1\}$ ,  $I_B = \{1, 2, \dots, p-1\}$ , 从而得  $|J_B \cap I_B| = k = 1$ , 所以此时两迭代阵特征值问题的函数关系为

$$(\lambda + \omega - 1)^p = (\lambda\gamma + \omega - \gamma)\omega^{p-1}\mu^p \quad (24)$$

例 2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{24} \\ 0 & B_{32} & 0 & 0 \\ B_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这时有  $J_B = \{1, 2\}$ ,  $I_B = \{1, 2\}$ ,  $|J_B \cap I_B| = 2$ ,  $p = 4$ , 从而得到两迭代阵特征值之间的函数关系为

$$(\lambda + \omega - 1)^4 = (\lambda\gamma + \omega - \gamma)^2 \omega^2 \mu^4 \quad (25)$$

由实际计算也可验证这个结论是正确的。

事实上, 因为  $\det(\mu I - B) = \mu^4 - \det(B_{13}B_{32}B_{24}B_{41}) = 0$

而

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \mathcal{L}_{\gamma, \omega}) &= \det(\xi I - \alpha B + \beta U) \\ &= \xi^4 - \alpha^2(\beta - \alpha)^2 \det(B_{13}B_{32}B_{24}B_{41}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \xi^4 &= \alpha^2(\beta - \alpha)^2 \det(B_{13}B_{32}B_{24}B_{41}) \\ &= \alpha^2(\beta - \alpha)^2 \mu^4 \end{aligned}$$

此即

$$(\lambda + \omega - 1)^4 = (\lambda\gamma + \omega - \gamma)^2 \omega^2 \mu^4$$

例 3

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & B_{14} \\ B_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

它不满足定理 2 条件, 但它是相容有序的 4-循环阵, 满足定理 1 条件, 故由定理 1 知函数方程为

$$(\lambda + \omega - 1) = (\lambda\gamma + \omega - \gamma)^3 \omega \mu^4 \quad (26)$$

## 参 考 文 献

- [1] Hadjidimos, A. Accelerated Overrelaxation Method, Math. Comp, 32, 141 (1976).  
 [2] Varga, R. S 著, 蒋尔雄等译, 矩阵迭代分析, 上海科技出版社, (1966).  
 [3] 龔林国、蔡大用, SSOR 与 Jacobi 迭代在一类  $p$ -弱循环矩阵下特征值之间的关系, 高等学校 计算数学学报, 1 (1985).

## Relationship Between Eigenvalues of Jacobi and AOR Iterative Matrix On a $p$ -weak Cyclic Matrix

Zeng Wenping

### Abstract

In this paper, new relationships between eigenvalues of Jacobi iterative matrix and Corresponding AOR (Accelerated Overrelaxation Method) iterative matrix is given On a  $p$ -weak cyclic matrix.