第7卷 第1期　　华侨大学学报　　Vol.7 No.1
1986年2月　　JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY　　Feb. 1986

广义对数均值及其性质

王　志　雄

（应用数学系）

摘　　要

本文研究包括对数均值、Stolarsky 均值和幂平均值在内的一类均值——广义对数均值，给出它的齐次性和可比较性定理，推广了文〔1〕，〔3〕，〔4〕和〔6〕的结果。

一、广义对数均值的定义和例

设 R^+ 为正实数全体组成的集合，$f(t)$ 是映 R^+ 到自身内的连续函数，对任意两个相异正实数 x,y 及实数 $k\neq o$，令

$$L_{\langle k,f(t)\rangle}(x,y)=\left[\int_x^y t^k f(t)dt\Big/\int_x^y f(t)dt\right]^{\frac{1}{k}}. \tag{1}$$

显然，$L_{\langle k,f(t)\rangle}(x,y)$ 是介于 x 和 y 之间的一个实数。当 $k=o$时，视 $L_{[k,f(t)]}(x,y)$ 为式(1)中当 $k\to o$ 时的极限，即令

$$L_{\langle o,f(t)\rangle}(x,y)=\lim_{k\to o} L_{\langle k,f(t)\rangle}(x,y)$$

$$=exp\left\{\int_x^y f(t)lntdt\Big/\int_x^y f(t)dt\right\}. \tag{2}$$

当 $x=y$ 时，视 $L_{\langle k,f(t)\rangle}(x,y)$ 为式(1)或(2)中当 $y\to x$ 时的极限，即令

$$L_{\langle k,f(t)\rangle}(x,y)=\lim_{y\to x} L_{\langle k,f(t)\rangle}(x,y)=x. \tag{3}$$

后面，为叙述简便，对于（1）型的函数当 $x=y$ 或 $k=o$ 时的值，都理解为如式（2）或（3）那样补充定义。

定义 1　对于任意的实数 k 及 R^+ 到自身内的任意连续函数$f(t)$，由式(1)、(2)或(3)确定的 $L_{\langle k,f(t)\rangle}(x,y)$ 是映 $R^+\times R^+$ 到 R^+ 中的连续函数，称这函数为 x,y 关于$\langle k,f(t)\rangle$的广义对数均值。

例1　$L_{\langle -1,1\rangle}(x,y)=L_{\langle 1,t^{-1}\rangle}(x,y)=\dfrac{x-y}{lnx-lny}$ 为对数均值[1]。

例2　$L_{\langle a-1,1\rangle}(x,y)=\left[\dfrac{x^a-y^a}{a(x-y)}\right]^{\frac{1}{a-1}}$，$(a\neq o,1)$和 $L_{\langle 0,1\rangle}(x,y)=\dfrac{1}{e}(y^y/x^x)^{\frac{1}{y-x}}$ 为 Stolarsky均值[2,3]

本文 1985 年 6 月 15 日收到。

例 3　$L_{\langle \mu, t^{\mu-1}\rangle}(x,y)=\left(\frac{x^\mu+y^\mu}{2}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ 为 x,y 的 μ 次幂平均值[4]。

二、可比较性定理

广义对数均值做为 $R^+\times R^+$ 上的函数，可比较性的意义见〔4〕(P.5)。

定理 1　$L_{\langle k, f(t)\rangle}=L_{\langle -k, t^k f(t)\rangle}$。

证明　由定义 1 立得。

定理2　若 $k<h$，则 $L_{\langle k, f(t)\rangle}<L_{\langle h, f(t)\rangle}$。

证明　此为〔7〕(P.66)之特款。

定理3　若 $f(t),g(t)$ 都是映 R^+ 到自身内的有一阶连续导数的函数，则 $L_{\langle k, f(t)\rangle}\leqslant L_{\langle k, g(t)\rangle}$ 当且仅当 $f(t)/g(t)$ 是单调减少的。

证明　当 $k>o$ 时，$L_{\langle k, f(t)\rangle}\leqslant L_{\langle k, g(t)\rangle}$ 当且仅当对一切 $(x,y)\in R^+\times R^+$，

$$\left[\int_x^y t^k f(t)dt\Big/\int_x^y f(t)dt\right]^{\frac{1}{k}}\leqslant\left[\int_x^y s^k g(s)ds\Big/\int_x^y g(s)ds\right]^{\frac{1}{k}}. \tag{4}$$

不妨设 $y>x$，则(4)等价于

$$\int_x^y dt\int_x^y (t^k-s^k)f(t)g(s)ds\leqslant o. \tag{5}$$

把正方形的积分区域沿直线 $t=s$ 分割为两个三角形，其一三角形上的积分变元对换，则得

$$\int_x^y dt\int_x^t (t^k-s^k)\left[\frac{f(t)}{g(t)}-\frac{f(s)}{g(s)}\right]g(t)g(s)ds\leqslant o. \tag{6}$$

因 $f(t)$，$g(s)$ 均为映 R^+ 到自身内的有一阶连续导数的函数，故不等式(6)对一切 x，$y(o<x<y)$ 成立，当且仅当 $f(t)/g(t)$ 是单调减少的。

当 $k<o$ 时，结合定理 1 可得结论。

当 $k=o$ 时，情况类似。证毕。

推论1　若 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都是映 R^+ 到自身内的有一阶连续导数的函数，则 $L\langle k,f(t)\rangle=L\langle k,g(t)\rangle$ 当且仅当存在正实数 a 使 $f(t)=ag(t)$。

证明　$L_{\langle k, g(t)\rangle}=L_{\langle k, f(t)\rangle}$ 当且仅当

$L_{\langle k, f(t)\rangle}\leqslant L_{\langle k, g(t)\rangle}$ 且 $L_{\langle k, g(t)\rangle}\leqslant L_{\langle k, f(t)\rangle}$，由定理 3，当且仅当 $\frac{f(t)}{g(t)}$ 且 $\frac{g(t)}{f(t)}$ 都是递减的，故 $f(t)/g(t)$ 必是某常数 a。因 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都是正值函数，从而，$a>o$。证毕。

三、齐次性定理

定义 2　若对一切正实数 c、x 和 y，

$L_{\langle k, f(t)\rangle}(cx,cy)=c\cdot L_{\langle k, f(t)\rangle}(x,y)$，则称广义对数均值 $L_{\langle k, f(t)\rangle}$ 是齐次的。

定理 4　若 $f(t)$ 是映 R^+ 到自身内的有一阶连续导数的函数，则广义对数均值 $L_{\langle k, f(t)\rangle}$ 是齐次的，当且仅当存在正实数 a 及实数 λ，使 $f(t)=at^{\lambda-1}$。

证明　充分性显然。

必要性：由定义 1 得，对一切 $c>o$，

$L_{\langle k,f(t)\rangle}(cx,cy)=c\cdot L_{\langle k,f(ct)\rangle}(x,y)$。若 $L_{\langle k,f(t)\rangle}$ 是齐次的，则 $L_{\langle k,f(ct)\rangle}=L_{\langle k,f(t)\rangle}$。由推论1，存在与 t 无关的正实数 $A(c)$ 使

$$f(ct)=A(c)f(t)。\tag{7}$$

令 $t=1$ 得 $A(c)=f(c)/f(1)$，故由(7)得

$$\frac{f(ct)}{f(1)}=\frac{f(c)}{f(1)}\cdot\frac{f(t)}{f(1)}.\tag{8}$$

函数方程(8)的唯一非零连续函数解是幂函数[5]，即存在实数 λ，使 $f(t)/f(1)=t^{\lambda-1}$。取 $a=f(1)>0$，得证。

由定理4及推论1，关于实数k及映 R^+ 到自身内的有一阶连续导数的函数 $f(t)$ 的广义对数均值L是齐次的，当且仅当存在实数 λ 使

$$L(x,y)=L_{\langle k,t^{\lambda-1}\rangle}(x,y)=\left[\frac{\lambda(y^{\lambda+k}-x^{\lambda+k})}{(\lambda+k)(y^\lambda-x^\lambda)}\right]^{\frac{1}{k}}.\tag{9}$$

下面，我们仅讨论这类均值，并把它简单地记为 $L_{k,\lambda}(x,y)$。由定理1—3得

推论2　$L_{k,\lambda}=L_{-k,\lambda+k}$。

推论3　$L_{k,\lambda}\leqslant L_{k',\lambda}$ 当且仅当 $k\leqslant k'$，$L_{k,\lambda}\leqslant L_{k,\lambda'}$ 当且仅当 $\lambda\leqslant\lambda'$。

四、H.L.P均值

文〔4〕定义了由 R^+ 上严格单调连续函数 $\varphi(x)$ 产生的均值

$$M_{\langle\varphi(t)\rangle}(x,y)=\varphi^{-1}\left[\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right],$$

我们把这种均值称为H.L.P (Hardy-Littlewood-Polya) 均值。这种均值是齐次的，当且仅当存在实数 μ 使

$$M_{\langle\varphi(t)\rangle}(x,y)=\left(\frac{x^\mu+y^\mu}{2}\right)^{\frac{1}{\mu}},\tag{10}$$

即 $M_{\langle\varphi(t)\rangle}$ 为 μ 次幂平均(〔4〕,P.74)。为简便起见，把它记为 M_μ。

定理5　齐次广义对数均值类真包含齐次H.L.P均值类。

证明　首先，由例1及定理4可知，对数均值 $L(x,y)=\dfrac{x-y}{\ln x-\ln y}$ 是齐次广义对数均值，但它不是H.L.P均值。若不然，设 $L=M_\mu$，即

$$\frac{x-y}{\ln x-\ln y}=\left(\frac{x^\mu+y^\mu}{2}\right)^{\frac{1}{\mu}},(x,y)\in R^+\times R^+.$$

记 $x/y=c$，则得

$$\frac{c-1}{\ln c}=\left(\frac{c^\mu+1}{2}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

对一切正实数 c 成立，矛盾。

其次，由例3及定理4知：一切齐次H.L.P均值 $M_\mu=L_{\mu,\mu}$ 是齐次广义对数均值。毕。证

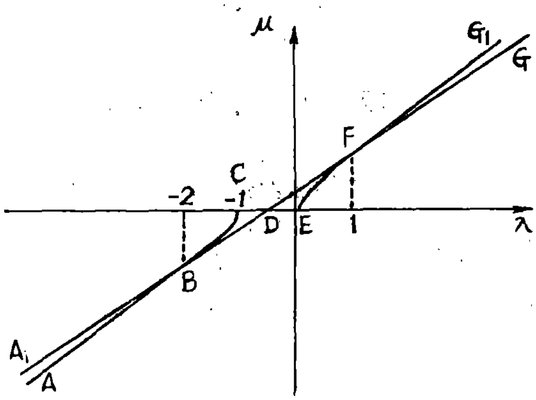
五、可比较性定理（续）

令

$$b_1(\lambda)=\begin{cases}1/\log_2\left(1+\frac{1}{\lambda}\right), & \lambda\leqslant-2\text{ 或 }o<\lambda\leqslant1,\\ \frac{2\lambda+1}{3}, & -2<\lambda\leqslant-\frac{1}{2}\text{ 或 }\lambda>1,\\ 0, & -\frac{1}{2}<\lambda\leqslant0;\end{cases}$$

$$b_2(\lambda)=\begin{cases}\frac{2\lambda+1}{3}, & \lambda\leqslant-2\text{ 或 }-\frac{1}{2}<\lambda\leqslant1,\\ 1/\log_2\left(1+\frac{1}{\lambda}\right), & -2<\lambda\leqslant-1\text{ 或 }\lambda>1,\\ 0, & -1<\lambda\leqslant-\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{11}$$

即 $\mu=b_1(\lambda)$ 和 $\mu=b_2(\lambda)$ 的图象分别是如图示的连续曲线 ABDEFG 和 A_1BCDFG_1。显然，



$\mu=b_1(\lambda)$ 和 $\mu=b_2(\lambda)$ 都是单调增加的，且 $b_1(\lambda)\leqslant b_2(\lambda)$。

定理 6　（1） 若 $\mu\leqslant b_1(\lambda)$，则 $M_\mu\leqslant L_{1,\lambda}$；

（2） 若 $\mu\geqslant b_2(\lambda)$，则 $M_\mu\geqslant L_{1,\lambda}$；

（3） 若 $b_1(\lambda)<\mu<b_2(\lambda)$，则 M_μ 和 $L_{1,\lambda}$ 不可比较。

证明　因 $b_1(\lambda)$，$b_2(\lambda)$ 及 $L_{1,\lambda}$ 对任意固定的 $(x,y)\in R^+\times R^+$ 关于 λ 都是连续的，故不妨只考虑 $\lambda\neq-2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1$ 的情况。

因 M_μ 和 $L_{1,\lambda}$ 都是齐次的，故比较 M_μ 和 $L_{1,\lambda}$ 等价于比较

$$\left(\frac{x^\mu+1}{2}\right)^{\frac{1}{\mu}}\text{ 与 }\frac{\lambda(1-x^{\lambda+1})}{(\lambda+1)(1-x^\lambda)},(0<x<1).$$

令　$$h(x)=\frac{1}{\mu}\ln\frac{x^\mu+1}{2}-\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{1-x^{\lambda+1}}{1-x^\lambda}\right),$$

对 λ 在(11)所示各分段区间内，当 $\mu=b_1(\lambda)$ 或 $\mu=b_2(\lambda)$ 时，考虑 $h(x)$，$h'(x)$，$u(x)=\lambda(\lambda+1)(x^\mu+1)(1-x^{\lambda+1})(1-x^\lambda)h'(x)$，$u'(x)$，$u''(x)$，$v(x)=x^{2-\mu}u''(x)$，$v'(x)$，$v''(x)$ 当 $o<x<1$ 时的增减性及符号，立得结论、证毕。

由定理6立得[1]：若 $L(x,y)$ 为 x 和 y 的对数均值，则 $M_0 < L < M_{1/3}$。

定理7　(1) 当 $k>0$ 时，

若 $\mu \leqslant kb_1(\frac{\lambda}{k})$，则 $M_\mu \leqslant L_{k,\lambda}$；

若 $\mu \geqslant kb_2(\frac{\lambda}{k})$，则 $M_\mu \geqslant L_{k,\lambda}$。

(2) 当 $k<0$ 时，

若 $\mu \leqslant kb_2(\frac{\lambda}{k})$，则 $M_\mu \leqslant L_{k,\lambda}$；

若 $\mu \geqslant kb_1(\frac{\lambda}{k})$，则 $M_\mu \geqslant L_{k,\lambda}$。

(3) 令

$$C_1(\lambda)=\begin{cases}\frac{2}{3}\lambda, & \lambda>0,\\ \lambda\ln 2, & \lambda\leqslant 0;\end{cases}$$

$$C_2(\lambda)=\begin{cases}\lambda\ln 2, & \lambda>0,\\ \frac{2}{3}\lambda, & \lambda\leqslant 0.\end{cases}$$

若 $\mu \leqslant C_1(\lambda)$，则 $M_\mu \leqslant L_{0,\lambda}$；若 $\mu \geqslant C_2(\lambda)$，则 $M_\mu \geqslant L_{0,\lambda}$。

证明　(1) 因 $k>0$，故由 $\mu \leqslant kb_1(\frac{\lambda}{k})$ 得 $\frac{\mu}{k} \leqslant b_1(\frac{\lambda}{k})$，由定理6得 $M_{\mu/k} \leqslant L_{1,\lambda/k}$。即对一切 $(x,y)\in R^+\times R^+$，

$$\left[\frac{(x^k)^{\frac{\mu}{k}}+(y^k)^{\frac{\mu}{k}}}{2}\right]^{\frac{k}{\mu}} \leqslant \frac{\frac{\lambda}{k}\left[(y^k)^{\frac{\lambda}{k}+1}-(x^k)^{\frac{\lambda}{k}+1}\right]}{\left(\frac{\lambda}{k}+1\right)\left[(y^k)^{\frac{\lambda}{k}}-(x^k)^{\frac{\lambda}{k}}\right]},$$

故

$$\left(\frac{x^\mu+y^\mu}{2}\right)^{\frac{1}{\mu}} \leqslant \left[\frac{\lambda(y^{\lambda+k}-x^{\lambda+k})}{(\lambda+k)(y^\lambda-x^\lambda)}\right]^{\frac{1}{k}},$$

即 $M_\mu \leqslant L_{k,\lambda}$。

对(1)之后半部分及(2)同理可证。

(3) 由(1)，当 $k>0$ 时，$M_{kb_1(\lambda/k)} \leqslant L_{k,\lambda}$，因为 $\lim\limits_{k\to 0^+} kb_1(\frac{\lambda}{k})=c_1(\lambda)$，故 $M_{c_1(\lambda)} \leqslant L_{0,\lambda}$。因 $c_1(\lambda)$ 是值域为 $(-\infty,+\infty)$ 的单调增加函数，由推论3，得(3)之前半部分。后半部分同理可证。完全证毕。

由定理7立得[4]：若 $\mu \leqslant \mu'$，则 $M_\mu \leqslant M_{\mu'}$。及[6]：$L_{\alpha-1,1} \leqslant M_{\frac{\alpha+1}{3}}$，$(-1<\alpha<\frac{1}{2}$ 或 $\alpha>2)$，$L_{\alpha-1,1} \geqslant M_{\frac{\alpha+1}{3}}$，$(\alpha<-1$ 或 $\frac{1}{2}<\alpha<2$。特别地，取 $\alpha=1$ 得 Stolarsky 不等式[3]：$L_{0,1} \leqslant M_{2/3}$。

参 考 文 献

〔1〕 Lin Tung Po, The Power Mean and the Logarithmic Mean, The Amer. Math. Monthly, 81(1974), 879-883.

〔2〕 Stolarsky K.B., The Power and Generalized logarithmic Means, The Amer. Math. Monthly, 87 (1980), 545-548.

〔3〕 Stolarsky K.B., Generalizations of Logarithmic Means, Math. Mag., 48(1975), 87—92.

〔4〕 Hardy G.H., Littlewood T. E. and Polya G., Inegualities, (中译本, 越民义译), 科学出版社, (1965).

〔5〕 Фихтенгольч Г.М., Курс Дифференчиального и интегрального исчисления, (中译本, 叶彦谦等译), 第一卷第一册, 人民教育出版社, (1980), 152.

〔6〕 Leach E. B. and Sholander M. C., Extended Mean Values, Amer. Math. Monthly, 85 (1978), 84—90.

〔7〕 Polya G. and Szegö G., Problems and Theorems in Analysis, I, Springer-Verlag, 4th ed. , (1976).

The Generalized Logarthmic Means and Their Properties

Wang Zhixiong

Abstract

This paper studies a class of means, the generalized logarithmic means, which contains logarithmic means, Stolarsky means and power means. Theorems about their homogeneity and comparable are given here, have generalized the results obtained in papers (1), (3), (4) and (6).