第6卷 第4期 华侨大学学报 Vol.6 No.4
1985年11月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY Nov. 1985

随机时间序列的适时区间预报法及其应用

陈 建 伟

（应用数学系）

摘 要

本文是在随机时间序列的适时预报的基础上，提出和论证了随机时间序列的适时区预报。给出了适时区间预报的递推公式以及推论。

（一） 引 言

BOX在1970年给出了用ARMA（p，q）模型来描述平稳时间序列的方法和具体的建模步骤。进一步的问题，就是从所建立的模型出发，对未来时刻的规律作出预报。杜金观等在1981年提出了一种新的预报方法——时间序列的适时预报法，可以根据实际获得的有限个数据x_1、…、x_k，给出x_{k+1}的严格的最小方差估计，以此作为x_{k+1}的预报值。此方法适用于实际问题的预报，特别是那些要求连续预报的问题。但这种方法只给出一个预报值（总估计），点估计没涉及到概率，所以其预报值的可靠性没得到确实地保证，而且在实际预测中，往往非常需要作趋势预报，给出真值的变化范围。本文介绍一种适时区间预报法，在适时预报的基础上进一步给出了区间预报，按概率的观点来考察预报趋势，克服了单点预报的不足，本文具体导出了区间预报上、下限的递推公式，求出递推算式的通解表达式。

（二） 方 法 讨 论

设随机时间序列w_1，w_2，…，是宽平稳，零均值的，并满足ARMA（p，q）模型

$$w_t-\varphi_1 w_{t-1}-\cdots-\varphi_p w_{t-p}=a_t-Qa_{t-1}-\cdots-Q_q a_{t-q} \quad (1)$$

其中a_t是白噪声，p是模型的自回归价数，q是模型的滑动平均阶数。

取

$$Q=\max(p,\ q)$$

作线性变换

本文1985年1月28日收到。

$$y_j=\begin{cases} w_j, & j\leqslant Q,\\ w_j-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i w_{j-i}, & j>Q,\end{cases} \tag{2}$$

置

$$W_k\triangleq\left\{w;\quad w=\sum_{j=1}^{k}a_jw_j,\quad a_j\text{ 为实数}\right\},$$

$$Y_k\triangleq\left\{y;\quad y=\sum_{j=1}^{k}b_jy_j,\quad b_j\text{ 为实数}\right\},$$

显然 $W_k\equiv Y_k$ 且都是线性空间。

用 $\hat{w}_k(l)$ 表示由实际观测值 w_1、w_2，…，w_k，对时刻 $k+l$ 的序列值所作的线性最小方差预报值，即

$$\hat{w}_k(l)\triangleq\hat{E}\left(\frac{w_{k+l}}{w_k,\ \cdots w_1}\right)\triangleq\hat{E}\left(\frac{w_{k+l}}{W_k}\right), \tag{3}$$

用 $\hat{y}_k(l)$ 表示所得新的序列 y_1，y_2，…y_k 对时刻 $k+l$ 的序列值所作的线性最小方差预报值，即：

$$\hat{y}_k(l)\triangleq\hat{E}\left(\frac{y_{k+l}}{y_k,\ \cdots y_1}\right)\triangleq\hat{E}\left(\frac{y_{k+l}}{Y_k}\right), \tag{4}$$

其中 $\hat{E}$ 是线性投影符号，记

$$\varepsilon_k\triangleq w_k-\hat{w}_{k-1}(l),\qquad \hat{\varepsilon}_k\triangleq y_{k-1}-\hat{y}_{k-1}(l),$$

则 $\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots\varepsilon_k\cdots\}$，$\{\hat{\varepsilon}_1,\ \hat{\varepsilon}_2,\ \cdots\hat{\varepsilon}_k\cdots\}$ 分别是 $\{w_1,\ w_2,\ \cdots w_k\cdots\}$，及 $\{y_1,\ y_2\cdots\}$ 所产生的新息序列。

当 $k<Q$ 时

$$\hat{\varepsilon}_k=y_k-\hat{y}_{k-1}(1)=w_k-\hat{E}\left(\frac{w_k}{W_{k-1}}\right)=w_k-\hat{w}_{k-1}(1)=\varepsilon_k$$

当 $k>Q$ 时

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_k&=y_k-\hat{y}_{k-1}(1)=\Phi(B)w_k-\hat{E}\left[\frac{\Phi(B)w_k}{W_{k-1}}\right]\\ &=\Phi(B)w_k-\left[\hat{w}_{k-1}(1)-\sum_{i=1}^{p}\varphi_iw_{k-i}\right]\\ &=w_k-\hat{w}_{k-1}(1)=\varepsilon_k,\end{aligned}$$

从而得出

$$\hat{\varepsilon}_k\equiv\varepsilon_k, \tag{5}$$

记

$$\Lambda_k\triangleq\left\{\varepsilon;\quad \varepsilon=\sum_{i=1}^{k}d_i\varepsilon_i,\quad d_i\text{ 为实数}\right\},$$

显然可得

$$W_k\equiv Y_k\equiv\Lambda_k.$$

由于线性最小方差估计 $\hat{w}_k(l)$ 实质上就是 w_k 在线性空间 W_k 上的正交投影，因此，根据线性空间理论以及式（1）至（2），可导出下列几个结论：

（a）　$E\varepsilon_kw_j=0$，　$j<k$，

（b）　$E\varepsilon_i\varepsilon_j=0$，　$i\neq j$，$j<k$，则 ε_1，…ε_k 是 Λ_k 上的一组正交基。

(c) $\hat{w}_k(l) = \hat{E}\left(\frac{w_{k+l}}{\Lambda_k}\right) = \sum_{j=1}^{k} \hat{C}_{k+l,j}\varepsilon_j$

$$\hat{y}_k(l) = \hat{E}\left(\frac{y_{k+l}}{\Lambda^q}\right) = \sum_{j=1}^{k} C_{k+l,j}\varepsilon_j$$

其中

$$\hat{C}_{k+l,j} = \frac{E(w_{k+l}\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j^2},$$

$$C_{k+l,j} = \frac{E(y_{k+l}\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j^2}, \quad j=1,2,\cdots k,$$

(d)新息序列 ε_j 的递推公式

$$\varepsilon_k = \begin{cases} y_k, & k=1, \\ y_k - \sum_{j=1}^{k-1} C_{k,j}\varepsilon_j, & 1<k<Q, \\ y_k - \sum_{j=k-q}^{k-1} C_{k,j}\varepsilon_j, & k>Q. \end{cases}$$

其中

$$C_{k,j} = \begin{cases} \left[r_{k,j}(y) - \sum_{i=1}^{j-1} C_{j,i}C_{k,i}r_{i,i}(\varepsilon)\right]\left[r_{j,j}(\varepsilon)\right]^{-1}, & 1<k\leqslant Q, \ 1\ j\ k-1 \\ \left[r_{k,j}(y) - \sum_{i=k-q}^{j-1} C_{j,i}C_{k,i}r_{i,i}(\varepsilon)\right]\left[r_{j,j}(\varepsilon)\right]^{-1}, & k>Q, \ k-q\ j\ k-1 \\ 0, & \end{cases}$$

$$r_{k,k}(\varepsilon) = \begin{cases} r_{k,k}(y), & k=1, \\ r_{k,k}(y) - \sum_{j=1}^{k-1} C^2_{k,j}r_{j,j}(\varepsilon), & 1<k\leqslant Q, \\ r_{k,k}(y) - \sum_{j=k-q}^{k-1} C^2_{k,j}r_{j,j}(\varepsilon), & k>Q, \end{cases}$$

$$r_{k,j}(y) \triangleq E(y_k y_j), \quad r_{j,j}(\varepsilon) \triangleq E\varepsilon_j^2,$$

上列各式中，当求和上限小于下限时，约定此和式为零值。

由此得到 l 步适时预报公式.

$$\hat{w}_k(l) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} C_{k+l,j}\varepsilon_j, & k+l\leqslant Q \\ \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \hat{w}_{k+l-j}(l) + \sum_{j=k+l-q}^{k} C_{k+l,j}\varepsilon_j, & k+l>Q \end{cases} \qquad (\text{I})$$

当 $l-j\leqslant 0$ 时，$\hat{w}_{k-j}(l) = w_{k-j+l}$，当求和上限小于下限时约定和值为零。

现在以上新息预报基础上进一步做区间预报。

设 ARMA(p, q)序列 $\{w_k\}$ 还满足正态条件，则在此正态条件下，线性最小方差估计，正交投影，条件期望三者是相等的，即

$$E\frac{w_{k+l}}{w_1,\cdots w_k} = w_k(l), \qquad (6)$$

设 $\underline{w}_k=(w_1,\ \cdots w_k)$ 的联合分布密度为 $P_{\underline{w}_k}(x)$，对给定的自然数 l 有

$$E\left[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)\right]^2=\int P_{\underline{w}_k}(x)\,E\frac{[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2}{\underline{w}_k}dx$$

$$=E\left\{E\frac{[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2}{\underline{w}_k}\right\}$$

当给定 $w_1,\ w_2,\ \cdots w_k$，之后 $E\frac{[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2}{\underline{w}_k}$ 是个常数，即

$$E\left[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)\right]^2=E\frac{[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2}{\underline{w}_k},\tag{7}$$

因此由正态向量条件分布性质以及式（6）、（7）得知，在 $w_1,\ \cdots w_k$，给定的条件下，w_{k+l} 的条件分布服从正态分布，$N\{\hat{w}_k(l),\ E[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2\}$。

则统计量：

$$T(l)=\frac{w_{k+l}-w_k(l)}{\sqrt{E[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2}}\sim N(0,\ 1),\qquad l=1,\ 2,\ \cdots$$

由此可以得到水平为 $1-\alpha$ 的适时 l 步预报区间

$$P\{L_1(l)\leqslant w_{k+l}\leqslant L_2(l)\}=1-\alpha,$$

其中

$$L_1(l)=\hat{w}_k(l)-x_\alpha\sqrt{E[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2},$$

$$L_2(l)=\hat{w}_k(l)+x_\alpha\sqrt{E[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2},$$

x_α 可查信度为 α 的正态标准表，

例如：当 $\alpha=0.05$ 时，查表可得 $x_\alpha=1.96$，

当 $\alpha=0.01$ 时，查表可得 $x_\alpha=2.88$。

则 $L_2(l)$，$L_1(l)$ 就是 l 步区间预报的上、下界，$1-\alpha$ 是置信水平，$\hat{w}_k(l)$ 是 l 步适时预报值，由适时预报公式（I）可求得。所以只需进一步求出 $\left\{E\left[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ 的值。

由此给出并证明如下几个定理：

定理 1　设 $\{w_t\}$ 是正态的 ARMA（p，q）序列，则

$$E\left[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)\right]^2=r_0-\sum_{i=1}^{k}\hat{C}^2_{k+l,i}E\varepsilon_i^2,\quad l=1,\ 2,\ \cdots$$

其中 $r_0=Ew^2_{k+l}$ 其它符号同以前定义一样。

证明　由 a），b），c），得

$$E[w_{k+l}-\hat{w}_k(l)]^2=Ew^2_{k+l}-2Ew_{k+l}\hat{w}_k(l)+E[\hat{w}_k(l)^2]$$

$$=Ew_{k+l}-2\sum_{i=1}^{k}\hat{C}_{k+l,j}Ew_{k+l}\varepsilon_i+E\left(\sum_{i=1}^{k}\hat{C}_{k+l,i}\varepsilon_i\right)^2$$

$$=r_0-2\sum_{i=1}^{k}\hat{C}_{k+l,i}E\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{k}\hat{C}_{k+l,i}E\varepsilon_i^2$$

$$+\sum_{i\neq j}^{k}\hat{C}_{k+l,i}\hat{C}_{k+l,j}E\varepsilon_i\varepsilon_j$$

$$=r_0-\sum_{i=1}^{k}\hat{C}_{k+l,i}E\varepsilon_i^2.$$

由上可知：

$$\hat{C}_{k+l,j}\equiv\frac{Ew_{k+l}\varepsilon_j}{E\varepsilon_j^2},\qquad C_{k+l,j}\equiv\frac{Ey_{k+l}\varepsilon_j}{E\varepsilon_j^2},\qquad j<k,$$

$$Ew_i\varepsilon_j=0,\qquad E\varepsilon_i\varepsilon_j=0,\qquad i<j<k,$$

$$\varepsilon_i=w_j-\hat{w}_{i-1}(l)=w_i-\sum_{r=1}^{i-1}\hat{C}_{i,r}\varepsilon_r,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots$$

故得

$$Ew_i\varepsilon_j=\begin{cases}E\left(\varepsilon_i+\sum\limits_{r=1}^{i-1}\hat{C}_{i,r}\varepsilon_r\right)\varepsilon_j=\hat{C}_{i,j}E\epsilon_j^2, & i>j\\ E\varepsilon_i\varepsilon_j, & i=j\\ 0 & i<j\end{cases}$$

因而

$$C_{i,j}\triangleq\frac{(Ey_i\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j}=\begin{cases}\dfrac{(Ey_i\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j}, & j<i\leqslant k,\\ 1, & j=i\leqslant k,\\ 0, & i<j\leqslant k,\end{cases}$$

由此得出以下 $\hat{C}_{k,j}$ 与 $C_{k,j}$ 间的关系式：

定理 2 在以上的条件下，$j>k$，则

$$C_{k,j}=\begin{cases}\hat{C}_{k,j}, & k\leqslant Q,\\ \hat{C}_{k,j}-\sum\limits_{i=1}^{\min(p,k-j)}\varphi_i\hat{C}_{k-i,j}, & k>Q,\end{cases}$$

并约定当和式上限小于下限时，和式值为零。

证明 因为，

$$y_k=\begin{cases}w_k, & k\leqslant Q,\\ w_k-\sum\limits_{i=1}^{p}\varphi_i w_{k-j}, & k>Q,\end{cases}$$

当 $j<k\leqslant$ 时，

$$C_{k,j}=\frac{(Ey_k\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j^2}=\frac{(Ew_k\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j^2}=\hat{C}_{k,j},$$

当 $j<k$，$k>Q$ 时，

$$C_{k,j}=\frac{(Ey_k\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j^2}$$

$$=\frac{(Ew_k\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j}-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\left[\frac{(Ew_{k-i}\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j^2}\right]$$

$$=\hat{C}_{k,j}-\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\frac{Ew_{k-i}\varepsilon_j)}{E\varepsilon_j^2}$$

$$=\begin{cases}\hat{C}_{k,j}-\sum\limits_{i=1}^{p}\varphi_i\hat{C}_{k-i,j}, & k-p\geqslant j,\\ \hat{C}_{k,j}-\sum\limits_{i=1}^{k-j}\varphi_i\hat{C}_{k-i,j}, & k-p<j,\end{cases}$$

$$=\hat{C}_{k,j}-\sum_{i=1}^{\min(p,k-j)}\varphi_i\hat{C}_{k-i,j}.$$

定理2给出了求 $\hat{C}_{k,j}$ 的递推公式，其中 $C_{k,j}$ 已在作适时预报时求出。

下面进一步解出 $\hat{C}_{k,j}$ 的递推差分公式的通解形式：

定理4　在以上条件下，则

$$\hat{C}_{k,j}=\begin{cases}C_{k,j}, & j<k\leqslant Q,\\ C_{k,j}+\sum_{l=0}^{k-Q-1}\sum_{i=1}^{p}\varphi_iC_{Q+1+l-i,j}A_l^{(k-Q-1)} & k>Q,\ j=1,2,\cdots,k-p-1,\\ C_{k,j}+\sum_{l=0}^{k-Q-1}\sum_{i=1}^{Q+1+l-j}\varphi_iC_{Q+1+l-i,j}A_l^{(k-Q-1)} & k>Q,\ j=k-p,\cdots,k-1,\end{cases}$$

$$=C_{k,j}+\sum_{l=0}^{k-Q-1}\sum_{i=1}^{\min(p,Q+1-l-j)}\varphi_iC_{Q+1+l-i,j}A_l^{(k+Q-1)}.$$

其中

$$A_i^{(L)}=\begin{cases}\sum_{l=i}^{L-1}A_i^{(l)}\varphi_{L-l}, & 1\leqslant L\leqslant p,\ i=0,1,\cdots,L-1,\\ \sum_{l=L-p}^{L-1}A_i^{(l)}\varphi_{L-l}, & p<L,\ i=0,1,\cdots,L-p+1,\\ \sum_{l=i}^{L-1}A_i^{(l)}\varphi_{L-l}, & p<L,\ i=L-p,\cdots,L-1,\end{cases}$$

$$=\sum_{l=\max(L-p,i)}^{L-1}A_i^{(l)}\varphi_{L-l},$$

$$A_L^{(L)}=1,\qquad 0\leqslant L,$$

约定

（1）$A_i^{(L)}=0$，　　$L<i$，

（2）上式中若和式的上限小于下限时，其和式为零。

为了证明定理3，先给出并证明如下引理：

引理：对任意自然数 m、n，及正整数 N，且 $n>N$，则

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n-N)}\sum_{l=0}^{n-i}a_{i,l}=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\min(\min(n-N,m),n-l)}a_{i,l},$$

当求和上限小于下限时，约定和值为零。

证明：当 $m\geqslant n-N$ 时，

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n-N)}\sum_{l=0}^{n-i}a_{i,l}=\sum_{i=1}^{n-N}\sum_{l=0}^{n-i}a_{i,l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} a_{1,l} + \sum_{l=0}^{n-2} a_{2,l} + \cdots + \sum_{l=0}^{N} a_{n-N,l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-N} a_{i,0} + \cdots + \sum_{i=1}^{n-N} a_{i,N-1} + \sum_{i=1}^{n-N} a_{i,N} + \sum_{i=1}^{n-N-1} a_{i,N+1} + \cdots + \sum_{i=1}^{1} a_{i,n-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n-N} a_{i,l} + \sum_{l=N}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-l} a_{i,l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min(n-N,\, n-l)} a_{i,l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min[\min(n-N,\, m),\, n-l]} a_{i,l}\ ,$$

同理证得

当 $m<n-N$ 时

$$\sum_{i=1}^{\min(m,\, n-N)} \sum_{l=0}^{n-i} a_{i,l} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min[\min(n-N,\, m),\, n-l]} a_{i,l}\ ,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{\min(m,\, n-N)} \sum_{l=0}^{n-i} a_{i,l} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{\min[\min(n-N,\, m),\, n-l]} a_{i,l}\ .$$

有了引理的准备，现证明定理3.

证明　由定理2得

$$\hat{C}_{k,j} = \begin{cases} C_{k,j}\ , & k \leqslant Q, \\ C_{k,j} + \sum_{i=1}^{\min(p,\, k-j)} \varphi_i \hat{C}_{k-i,j}\ , & k > Q, \end{cases}$$

所以当 $k=Q+1$ 时，$j<Q+1$，

$$\hat{C}_{Q+1,j} = C_{Q+1,j} + \sum_{i=1}^{\min(p,\, Q+1-j)} \varphi_i \hat{C}_{Q+1-i,j}$$

$$= \hat{C}_{Q+1,j} + \sum_{i=1}^{\min(p,\, Q+1-j)} \varphi_i C_{Q+1-i,j}\ ,$$

取　$A_0^0=1$，

即得

$$\hat{C}_{Q+1,j} = C_{Q+1,j} + \sum_{l=0}^{Q+1-Q-1} \sum_{i=1}^{\min(p,\, Q+1+l-j)} \varphi_i \hat{C}_{Q+1+l-i,j} A_l^{(Q+1-Q-1)}$$

$$= C_{Q+1,j} + \sum_{l=0}^{k-Q-1} \sum_{i=1}^{\min(p,\, Q+1+l-j)} \varphi_i C_{Q+1+l-i-j} A_l^{(k-Q-1)},$$

假设当 $k \leqslant Q+n$，原式成立，则 $n_1 \leqslant n$（$k=Q+n_1$），

$$\hat{C}_{Q+n_1,j} = C_{Q+n_1,j} + \sum_{l=0}^{k-Q-1} \sum_{i=1}^{\min(p,\, Q+1+l-j)} \varphi_i C_{Q+1+l-i,j} A_l^{(k-Q-1)},$$

其中

$$\begin{cases} A_i^{(n_1-1)} = \sum\limits_{l=\max(L-p,\ i)}^{n_1-1-1} A_i^{(l)}\varphi_{L-l}, & i=0,\ 1,\ \cdots,\ n_1-1, \\ A_{n_1-1}^{(n_1-1)}=1\ , \qquad A_i^{(l)}=0\ , & l<i\ , \end{cases}$$

当 $k=Q+n+1$，由引理得

$$\hat{C}_{Q+n+1,j}=C_{Q+n+1,j}+\sum_{i=1}^{\min(p,Q+1+n-j)}\varphi_i\hat{C}_{Q+1+n-i,j}$$

$$=C_{Q+n+1,j}+\sum_{i=1}^{\min(p,Q+1+n-j)}\varphi_i\Big(C_{Q+1+n-i,j}$$

$$+\sum_{l=0}^{n-i}\sum_{r=1}^{\min(p,Q-j+l+1)}\varphi_i C_{Q+1+l-r,j}A_l^{(n-i)}\Big)$$

$$=C_{Q+n+1,j}+\sum_{i=1}^{\min(p,Q+n+1-j)}\varphi_i C_{Q+1+n-i,j}$$

$$+\sum_{i=1}^{\min(p,Q+1+n-j)}\sum_{l=0}^{n-i}\sum_{r=1}^{\min(Q+1,l-j,p)}\varphi_r C_{Q+1+l-r,j}A_l^{(n-i)}\varphi_i$$

$$=C_{Q+1+n,j}+\sum_{i=1}^{\min(p,Q+1+n-j)}\varphi_i C_{Q+1+n-i,j}$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{\min[\min(p,Q+1+n-j),n-l]}\varphi_i\sum_{r=1}^{\min(p,Q+1+l-j)}\varphi_r C_{Q+1+l-r}A_l^{(n-i)}$$

$$=C_{Q+1+n,j}+\sum_{i=1}^{\min(p,Q+1+n-j)}\varphi_i C_{Q+1+n-i,j}$$

$$+\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\min(p,Q+1+l-j)}\sum_{i=\max[\max(n-p,\ j-(Q+1)),\ l]}^{n-1}\varphi_{n-i}A_l^{(i)}\varphi_r C_{Q+1+l-r,j}$$

$$=\begin{cases} C_{Q+1+n,j}+\sum\limits_{i=1}^{\min(p,Q+1+n-j)}\varphi_i C_{Q+1+n-j,j} \\ \quad+\sum\limits_{l=0}^{n-1}\sum\limits_{r=1}^{\min(p,Q+1+l-j)}\sum\limits_{i=\max(n-p,\ l)}^{n-1}\varphi_{n-i}\varphi_r A_l^{(i)}C_{Q+1+l-r,j} \\ \hfill p<Q+1+n-j\ , \\ C_{Q+1+n,j}+\sum\limits_{i=1}^{\min(p,Q+1+n-j)}\varphi_i C_{Q+1+n-i,j} \\ \quad+\sum\limits_{l=0}^{n-1}\sum\limits_{r=1}^{\min(p,Q+1+l-j)}\sum\limits_{r=\max[j-(Q+1),\ l]}^{n-1}\varphi_{n-i}A_l^{(i)}\varphi_r C_{Q+1+l-r,j} \\ \hfill P\geqslant Q+1+n-j, \end{cases}$$

$$
= \begin{cases}
C_{Q+1+n-j} + \sum_{i=1}^{\min(p,\,Q+1+n-j)} \varphi_i C_{Q+n+1-i,\,j} \\
\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q+1+l-j)} \sum_{i=\max(n-p,\,l)}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j} & p<Q+1+n-j\,, \\
C_{Q+1+n,\,j} + \sum_{i=1}^{\min(p,\,Q+1+n-j)} \varphi_i C_{Q+n+1-i,\,j} \\
\quad + \sum_{l=0}^{j-(Q+1)} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q+1+l-j)} \sum_{i=j-(Q+1)}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j} \\
\quad + \sum_{l=j-(Q+1)+1}^{n-1} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q-j+l+1)} \sum_{i=l}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j} & p\geqslant Q+1+n\,,
\end{cases}
$$

由于当 $l<j-(Q+1)+r$，可推出 $Q+1+l-r<j$，($r=1,\ 2,\ \cdots,\ $)，因此得

$$C_{Q+1+l-rj}=0$$

所以

$$\sum_{l=0}^{j-(Q+1)} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q-j+l+1)} \sum_{i=j-(Q+1)}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j}=0,$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{j-(Q+1)} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q+1+l-j)} \sum_{\max(n-p,\,l)}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j}=0,$$

并且当 $l>j-(Q+1)$ 且 $p\geqslant Q+1+n-j$ 时，$l\geqslant n-p$

因此

$$\sum_{l=j-(Q+1)}^{n-1} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q-j+l+1)} \sum_{i=l}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j}$$

$$= \sum_{l=j-(Q+1)}^{n-1} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q+1+l-j)} \sum_{i=\max(l,\,n-p}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j}\,, \qquad p\geqslant Q+1+n-j\,,$$

于是

$$
C_{Q+n+1,\,j} = \begin{cases}
C_{Q+1+n,\,j} + \sum_{i=1}^{\min(p,\,Q+1+n-j)} \varphi_i C_{Q+1+n-i,\,j} \\
\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q-j+l+1)} \sum_{i=\max(n-p,\,l)}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j}\,, & p<Q+1+n-j\,, \\
C_{Q+1+n,\,j} + \sum_{i=1}^{\min(p,\,Q+1-j+n)} \varphi_i C_{Q+1+n-i,\,j} \\
\quad + \sum_{l=0}^{j-(Q+1)} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q+1+l-j)} \sum_{i=\max(n-p,\,l)}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j} \\
\quad + \sum_{l=j-(Q+1)}^{n-1} \sum_{r=1}^{\min(p,\,Q+1+l-j)} \sum_{i=\max(n-p,\,l)}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,\,j} & p\geqslant Q+1+n-j\,,
\end{cases}
$$

$$= C_{Q+n+1,j} + \sum_{i=1}^{\min(p,Q+1+n-j)} \varphi_i C_{Q+1+n-i,j} + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{\min(p,Q+1+n-j)} \left(\sum_{i=\max(n-p,l)}^{n-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)} \right) \varphi_r C_{Q+1-r+l,j},$$

取

$$\begin{cases} A_l^{(n)} = \sum_{i=\max(n-p,l)}^{l-1} \varphi_{n-i} A_l^{(i)}, & l=1,2,\cdots,n-1, \\ A_n^{(n)} = 1, \quad A_l^{(i)} = 0, & i<l, \end{cases}$$

即得

$$\hat{C}_{Q+1+n,j} = C_{Q+1+n,j} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{r=1}^{\min(p,Q+1+n-j)} \varphi_r C_{Q+1+l-r,j} A_l^{(n+1+Q-l-1)},$$

原式成立。

由数学归纳法得：对任意自然数 L

$$\hat{C}_{Q+L} = C_{Q+L,j} = \sum_{l=0}^{Q+L-Q-1} \sum_{i=1}^{\min(p,Q-j+1+l)} \varphi_i C_{Q+1+l-i,j} A_l^{(Q+L-l-1)},$$

其中

$$\begin{cases} A_l^{(L)} = \sum_{i=\max(L-p,l)}^{L-1} A_l^{(i)} \varphi_{L-i}, & l=1,2,\cdots,L-1, \\ A_L^{(L)} = 1, \quad A_l^{(i)} = 0, & i<l. \end{cases}$$

由定理 3 得出下列推论

推论：在以上条件下

$$A_i^{(L)} = A_{i-1}^{(L-1)} \quad i=1,2,\cdots,L, \qquad L \text{ 为自然数},$$

证明：当 $L=1$ 时，显然 $A_1^{(1)} = A_0^{(0)}$

假定当 $L \leqslant n$ 时，$A_i^{(L)} = A_{i-1}^{(L-1)} \quad i=1,2,\cdots,L$，

看 $L=n+1$ 时，$i=1,2,\cdots,n$，

$$\begin{aligned} A_i^{(n+1)} &= \sum_{l=\max(n+1-p,i)}^{n} A_i^{(l)} \varphi_{n-1-l} \\ &= \sum_{l=\max(n+1-p,i)}^{n} A_{i-1}^{(l-1)} \varphi_{n+1-l} \\ &= \sum_{l=\max(n-p,i-1)}^{n-1} A_{i-1}^{(l)} \varphi_{n-l} \\ &= A_{i-1}^{(n-1)}, \end{aligned}$$

即结论成立。

由数学归纳法得：对任意自然数 L

$$A_i^{(L)} = A_{i-1}^{(L-1)}, \quad i=1,2,\cdots,L,$$

由推论得知：当计算 $A_i^{(L)}$ ($i=1,2,\cdots,L$，L 为自然数)时，只要求出 $A_1^{(i)}$ ($i=1,2,\cdots,L$，)这 L 个值就行了，大大简化求 $\hat{C}_{i,j}$ 的计算量。

至此给出了求 $\left[E\left(w_{k+l}-\hat{W}_k(l)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 的全部递推公式。

综合上述得到 l 步适时区间预报的上限、下限的预报公式，

$$L_{2,1}^{(l)}=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{k}C_{k+l,j}\varepsilon_j\pm x_\alpha\left(r_0-\sum\limits_{i=1}^{k}\hat{C}_{k+l,i}^2E\varepsilon_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, & k+l\leqslant Q,\\ \sum\limits_{j=K+l-q}^{k}C_{k+l,j}\varepsilon_j\pm x_\alpha\left(r_0-\sum\limits_{i=1}^{k}\hat{C}_{k+l,i}^2E\varepsilon_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum\limits_{j=1}^{p}\varphi_i\hat{W}_{k+l-j}(l), & k+l>Q,\end{cases}$$

当 $l-j\leqslant0$ 时，$\hat{w}_{k-j}(l)=w_{k-j+l}$，当求和上限小于下限时，约定和值为零。

（三）　实　　例

某航空公司要根据过去11年每月乘客的人数来下一年每月乘客人数进行较可靠的趋势预测。设 w_1，…，w_N，表示所获得的资料，$N=11\times12=132$，

(1)通过分析数据得，它具有周期为12的季节性趋势和逐年增长的趋势，因此必须进行平稳化：

$$Z_{t-13}=\nabla\nabla_{12}(w_t-w_t)=(1-B)(1-B^{12})(w_t-w_t),\quad t>13,$$

所得到的新序列 $\{Z_t\}$ 满足平稳，零均值，正态条件。

(2)求出自，编相关函 $\{P_k\}$，$\{\Phi_{k,k}\}$，发现自相关函数在 $k=13$ 后有截尾性，因此可判断13步截尾，用其它途径都得到同样的结果，所以可认为是MA(13)模型。

$$Z_t=a_t-\theta_1a_{t-1}\cdots\theta_{13}a_{t-13},\quad t>13,$$

(3)用适时预报及适时区间预报求出1—12月乘客人数的预报值及区间值预报，详见下表。

1	月份	预报值	95%的置信度 下限	95%的置信度 上限	实测值	实测值是否在区间内
1	1	6.008	5.7906	6.2251	6.033	√
2	2	5.947	5.7271	6.1669	5.969	√
3	3	6.059	5.8373	6.2807	6.038	√
4	4	6.061	5.8399	6.2781	6.133	√
5	5	6.095	5.8716	6.3184	6.157	√
6	6	9.451	6.0207	6.4813	6.282	√
7	7	6.400	6.156	6.644	6.433	√
8	8	6.396	6.1488	6.6432	6.407	√
9	9	6.221	5.9738	6.4682	6.230	√
10	10	6.091	5.8527	6.3353	6.133	√
11	11	5.973	5.7251	6.2209	5.966	√
12	12	6.084	5.7508	6.4172	5.068	√

由表可见，预报值的平均相对误差在3%以下，区间预报的准确率达100%。

本文承陈兴钧老师提出宝贵的意见，谨此表示感谢。

参 考 文 献

〔1〕BOX. G. P. and G. M. Jenkins, Time series analyeis forecasting and control, Holden Day., (1970).
〔2〕杜金观、项静恬，随机序列的适时预报方法，数学的实践与认识，1，(1981)。
〔3〕安鸿志等，时间序列的分析与应用，科科学出版社，(1983)。
〔4〕中国科学院应用数学研究所，离散时间系统滤波的数学方法，国防工业出版社，(1975)。
〔5〕复旦大学，概率论（一，二册），人民出版社，(1981)。

A Methed of the Timely Interval Forcasting of Stationary Time Series and Its Application

Chen Jianwei

Abstract

In theis paper I carry out and prove the timely interval forecasting of stationary time series based on the timely forecasting of stationary time series. A recurrence formula and its corollary are also given.