第6卷 第4期　　华侨大学学报　　Vol.6 No.4
1985年11月　　JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY　　Nov. 1985

带耗散的气体动力学方程组的广义解存在性定理

梁　敏

（应用数学系81级研究生）

摘　　要

关于一维均熵气体动力学方程组 $v_t-u_x=0$，$u_t+[p(v)]_x=0$，在 $p(v)=k^2v^{-\gamma}$ 时，H.C.Бахвадов（1970），T.Nishida（1968）及 T.Nishida 和 J.A.Smoller（1973）分别就 $0<\gamma<1$，$\gamma=1$ 及 $1<\gamma\leq3$ 的情形研究了初值问题广义解的存在性.对一般的 $p=p(v)$，这里 $p'(v)<0$，$p''(v)>0$，张同和郭于法（1968）就一类初值获得初值问题广义解的整体存在性.本文将上述结果推广到带耗散的气体动力学方程组 $v_t-u_x=0$，$u_t+[p(v)]_x=-A^2u$ 的情形，这里 $A=\text{const}$.

一、引　　言

本文考虑一维带耗散的多方气体动力学方程组的初值问题

$$\begin{cases} V_t-u_x=0, \\ u_t+[p(v)]_x=-A^2u, \end{cases} \quad t>0,\ x\in R^1, \tag{1.1}$$

$$(v(0,x),\ u(0,x))=(v_0(x),\ u_0(x)),\ x\in R^1; \tag{1.2}$$

方程组(1.1)是拟线性严格双曲型方程组的典型方程，这里 v 是比容，u 是速度，$p(v)=k^2v^{-\gamma}$，$0<\gamma\leq3$，$K=const.>0$，是多方气体的状态方程 $-A^2u$ 是耗散项，$A=const.$. 当 $A=0$ 时，方程组（1.1）是众所周知的一维均熵多方气体动力学方程组

$$\begin{cases} v_t-u_x=0, \\ u_t+[p(v)]_x=0. \end{cases} \tag{1.3}$$

本文总是假设初值（$v_0(x)$，$u_0(x)$）是有界变差的，并设存在正数 $\underline{V}$ 和 $\bar{V}$，使得初值满足

$$0<\underline{V}<v_0(x)<\bar{V}<\infty. \tag{1.4}$$

在1982年，*C.M.Dafermos* & *L.Hsiao*[1] 对一般带耗散且非齐次的拟线性严格双曲型方程组，就初值的全变差是充分小的情形，获得在带域 $[O,T]\times R^1$ 上广义解的存在性.

然而，对方程组（1.1）的初值问题，可以放宽文[1]中对初值的全变差限制. 本文得

本文1985年1月23日收到.

到：（1）在$\gamma=1$或$0<\gamma<1$的情形，若初值分别满足$T.Nishida$[2]和C. Бахвалов[3]在研究相应的无耗散方程组（1.3）时的要求，我们可以得到在$t>0$上有整体广义解存在．此时，对初值的全变差不加任何限制．（2）若$\gamma>1$，那么存在确定的正数a（见定理2），a仅依赖于常数K、$\underline{V}$及$\bar{V}$，当成立

$$(\gamma-1)\cdot TV\{v_0(x),\ u_0(x)\}\cdot e^{A^2T}<a \tag{1.5}$$

时，在带域$[O,\ T]\times R^1$上存在广义解．（1.5）式允许初值的全变差是任意大，γ适当接近1．顺便指出，当$A=0$时，本文得到的结果是与关于无耗散的方程组（1.3）的结果[2, 4]相当．

对于一般的状态方程$p=p(v)$，即$p(v)\epsilon C^2(0,\infty)$，$p'(v)<0$，$p''(v)>0$，假设初值（1.2）满足文[5]中的某种有序性条件．文[5]获得：当$A=0$时，初值问题(1.1)(1.2)存在整体广义解，而且广义解保持初值的有序性．本文指出：当$A\neq 0$时，文[5]的结论仍然成立（见定理3）．

二、差　分　格　式

我们使用通常适用于方程组（1.1）的$Glimm$格式构造初值问题(1.1)、(1.2)的近似解．具体构造步骤是：选取网格的空间步长$l>0$，时间步长$h>0$，它们满足Courant-Friedrich-Lewy条件：

$$\frac{l}{h}\geqslant sup\left(K\gamma^{1/2}/v^{(1+\varepsilon)}\right), \tag{2.1}$$

其中$\varepsilon=\dfrac{\gamma-1}{2}$，$-\frac{1}{2}<\varepsilon\leqslant 1$，$v$取所有将考虑的值．首先给定等分布的随机序列$\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$，$-1<\alpha_m<1$．然后用归纳法构造近似解$(v^l,\ u^l)(t,\ x)$．令

$$(v^l,\ u^l)(t,\ x)=(v_0(ml),\ u_0(ml)) \tag{2.2}$$
$$((m-1)l<x<(m+1)l,\ m为偶数)$$

在$0<t<h$，$ml<x<(m+2)l$（m为偶数）中，定义近似解$(v^l,u^l)(t,x)$为$Riemann$问题（1.3）

$$(v^l,\ u^l)(0,\ x)=\begin{cases}(v_0(ml),\ u_0(ml)), & x<(m+1)l\\ (v_0((m+2)l),\ u_0((m+2)l)) & x>(m+1)l\end{cases} \tag{2.3}$$

的解．设$t<nh$时，$(v^l,\ u^l)(t,\ x)$已有定义，我们取

$$\begin{aligned} &v^l(nh,\ x)=v^l(nh-0,\ y_{n,m}),\\ &\qquad\qquad (m-1)l<x<(m+1)l \\ &u^l(nh,\ x)=(1-A^2h)u^l(nh-0,\ y_{n,m}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中$y_{n,m}=(m+\alpha_n)l$，$n+m$为偶数．记带域$D_n=\{(t,x)|nh<t<(n+1)h,\ x\epsilon R^1\}$，矩形$D_{n,m}=\{(t,\ x)|nh<t<(n+1)h,\ (m-2)l<x<ml\}$，$n+m$为偶数．显然有$D_n=\sum\limits_{n+m=偶}D_{n,m}$．

在矩形$D_{n,m}$中，近似解$(v^l,\ u^l)(t,\ x)$被定义为$Riemann$问题

$$\begin{cases}v_t-u_x=0\\ u_t+[p(v)]_x=0\end{cases}\qquad t>nh,\ x\epsilon R^1 \tag{2.5}$$

$$(v,u)(nh,x)=\begin{cases}(v^l,u^l)(nh,(m-2)l), & x<(m-1)l\\ (v^l,u^l)(nh,ml), & x>(m-1)l\end{cases} \tag{2.6}$$

的解在该矩形内的限制。我们熟知，问题（2.5）、（2.6）的解是由常状态及初等波（激波或稀疏波）组成[4]。今后提到初等波总是指方程组（1.3）的初等波。为了得到近似解本身及其对 x 的全变差的一致有界性，按照通常的办法，我们讨论在以折线 J_1 及 J_2 为边界的方块状区域 $\triangle_{n,m}$ 中初等波的相互作用。J_1（相应地 J_2）是联结随机网格点$[(n+1)h,y_{n+1,m-1}]$、$[nh,y_{n,m}]$及$[(n+1)h,y_{n+1,m+1}]$（相应地$[(n+1)h,y_{n+1,m-1}]$、$[(n+2)h,y_{n+2,m}]$及$[(n+1)h,y_{n+1,m+1}]$）的折线，这里 $n+m$ 为偶数。由于方程组（1.3）的特征根 $\lambda_1<0<\lambda_2$，在 J_1 上至多有三个初等波进入$\triangle_{n,m}$相互作用，与通常的做法类似，我们只要考虑仅有两个初等波在 J_1 上相互作用的情形，记这两个初等波为 W_2+W_1。设初等波 W_2 的左状态为(v_L,u_L)，W_1 的右状态为(v_r,u_r)。（2.4）式知近似解$(v^l,u^l)(t,x)$在点$((n+1)h,ml)$发出的不再是由 *Riemann* 问题

$$\begin{cases}v_t-u_x=0,\\ u^l+[p(v)]_x=0,\end{cases}\qquad t>(n+1)h,\ x\in R^1 \tag{2.7}$$

$$(v,u)((n+1)h,x)=\begin{cases}(vl,ul), & x<ml\\ (v_r,u_r) & x>ml\end{cases} \tag{2.8}$$

的解的初等波 $W_1'+W_2'$，而是 *Riemann* 问题（2.7）

$$(v,u)((n+1)h,x)=\begin{cases}(\bar{v}l,\bar{u}l), & x<ml\\ (\bar{v}_r,\bar{u}_r), & x>ml\end{cases} \tag{2.9}$$

的解的初等波 $\bar{W}_1+\bar{W}_2$，其中

$$\begin{aligned}&\bar{v}l=vl,\ \bar{u}l=(1-A^2h)ul,\\ &\bar{v}_r=\bar{v}_r,\ \bar{u}_r=(1-A^2h)u_r.\end{aligned} \tag{2.10}$$

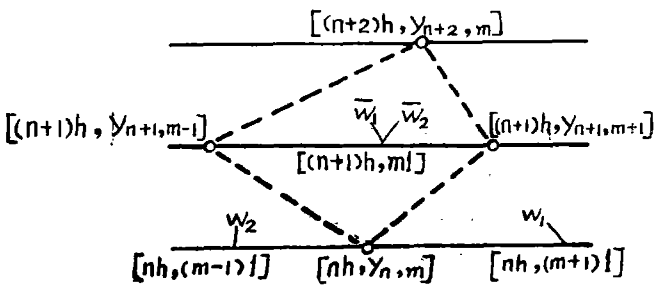

图 1

初等波 W_2+W_1 与初等波 $W_1'+W_2'$ 的关系是众所周知的初等波相互作用关系[4]，我们简记为

$$W_2+W_1\longrightarrow W_1'+W_2'. \tag{I}$$

问题（2.7）（2.8）及问题（2.7）（2.9）的解的初等波 $W_1'+W_2'$ 与 $\bar{W}_1+\bar{W}_2$ 之间的关系，称为耗散对初等波的影响关系，简记为

$$W_1' + W_2' \Longrightarrow \overline{W}_1 + \overline{W}_2. \qquad (\text{Ⅱ})$$

对关系（Ⅱ）的研究结果将是本文的基本引理。这样对初等波 W_2+W_1 与初等波 $\overline{W}_1+\overline{W}_2$ 之间的关系的研究可以分解为对关系（Ⅰ）及关系（Ⅱ）的研究，即有

$$W_2 + W_1 \longrightarrow W_1' + W_2' \Longrightarrow \overline{W}_1 + \overline{W}_2.$$

三、初等波的相互作用及耗散的影响

方程组（1.1）在 $v>0$，$u\in R^1$ 上是双曲型的，它的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \mp k\sqrt{\gamma}\,\rho^{1+\varepsilon}, \qquad (\rho>0) \qquad (3.1)$$

其中密度 $\rho=\frac{1}{v}$，$-\frac{1}{2}<\varepsilon\leqslant 1$。取 Riemann 不变量

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u+\Phi(v)), \\ s &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u+\Phi(v)), \end{aligned} \qquad (3.2)$$

其中

$$\Phi(v) = \begin{cases} -k\sqrt{\gamma}\,(\rho^{\varepsilon}-1)/\varepsilon, & \varepsilon\neq 0 \\ -k\ln\rho, & \varepsilon=0 \end{cases}$$

在 $r-s$ 平面上，我们给出初等波曲线的性质[4]。以 S_1 表示 1—激波曲线，它的方程是

$$S_1: \begin{cases} r_0 - r = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_0^{\varepsilon}F_+(\alpha), \\ s_0 - s = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_0^{\varepsilon}F_-(\alpha); \end{cases} \qquad \varepsilon\neq 0 \qquad (3.3)$$

$$S_1: \begin{cases} r_0 - r = \frac{1}{\sqrt{2}}k\left(\frac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha}}+\ln\alpha\right), \\ s_0 - s = \frac{1}{\sqrt{2}}k\left(\frac{\alpha-1}{\sqrt{\alpha}}-\ln\alpha\right); \end{cases} \qquad \varepsilon=0$$

这里 $r_0=r(u_0,\rho_0)$、$s_0=s(u_0,\rho_0)$ 是 1—激波的左状态，$r(u,\rho)$、$s(u,\rho)$ 是右状态，$F_\pm(\alpha) = K\left[\sqrt{(1-\alpha^{-1})(\alpha^2-1)} \pm \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\alpha^{\varepsilon}-1)\right]$，$\alpha=\frac{\rho}{\rho_0}\geqslant 1$。以 s_2^{-1} 表示逆 2—激波曲线，它的方程是

$$S_2^{-1}: \begin{cases} s_0 - s = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_0^{\varepsilon}F_+(\alpha), \\ r_0 - r = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_0^{\varepsilon}F_-(\alpha); \end{cases} \qquad \varepsilon\neq 0 \qquad (3.4)$$

$$S_2^{-1}: \begin{cases} s_0 - s = \frac{K}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\alpha}{\sqrt{\alpha}}+\ln\alpha\right), \\ r_0 - r = \frac{K}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\alpha}{\sqrt{\alpha}}-\ln\alpha\right); \end{cases} \qquad \varepsilon=0$$

这里（r_0，s_0）是2—激波的右状态，（r，s）是左状态，$\alpha=\rho/\rho_0\geqslant 1$。为了方便，我们仍用符号 S_1、S_2 及 R_1、R_2 表示 1—激波、2—激波、1—稀疏波及 2—稀疏波。沿用文 [6] 的定义，以 $\Phi(v)$ 的跃度表示初等波的强度，记为 $|S_1|$、$|S_2|$、$|R_1|$、$|R_2|$。

下述引理1是关于耗散对初等波的影响。

引理1 设$A^2h<1$，则 Riemann 问题（2.7）（2.8）及问题（2.7）（2.9）的解的初等波之间的关系，即关系（Ⅱ）$W_1'+W_2'\Longrightarrow\bar{W}_1+\bar{W}_2$，有以下几种情形：

1. $R_1'+S_2'\Longrightarrow\bar{R}_1+\bar{S}_2$

$|\bar{R}_1|+|\bar{S}_2|=|R_1'|+|S_2'|$

$|\bar{S}_2|\leqslant|S_2'|+\frac{1}{2}A^2h(|R_1'|+|S_2'|)$，

2. $S_1'+R_2'\Longrightarrow\bar{S}_1+\bar{R}_2$

$|\bar{S}_1|+|R_2|=|S_1'|+|R_2'|$

$|\bar{S}_1|\leqslant|S_1'|+\frac{1}{2}A^2h(|S_1'|+|R_2'|)$，

3.a) $R_1'+R_2'\Longrightarrow\bar{R}_1+\bar{R}_2$

$|\bar{R}_1|\leqslant|R_1'|$，$|\bar{R}_2|\leqslant|R_2'|$

b) $R_1'+R_2'\Longrightarrow\bar{R}_1+\bar{S}_2$

$|\bar{R}_1|+|\bar{S}_2|=|R_1'|-|R_2'|$

$|\bar{S}_2|\leqslant\frac{1}{2}A^2h(|R_1'|+|R_2'|)$

c) $R_1'+R_2'\Longrightarrow\bar{S}_1+\bar{R}_2$

$|\bar{S}_1|+|\bar{R}_2|=|R_2'|-|R_1'|$

$|\bar{S}_1|\leqslant\frac{1}{2}A^2h(|R_1'|+|R_2'|)$，

4.a) $S_1'+S_2'\Longrightarrow\bar{S}_1+\bar{S}_2$

$|\bar{S}_1|\leqslant|S_1'|$，$|\bar{S}_2|\leqslant|S_2'|$

b) $S_1'+S_2'\Longrightarrow\bar{R}_1+\bar{S}_2$

$|\bar{R}_1|+|\bar{S}_2|=|S_2'|-|S_1'|$

c) $S_1'+S_2'\Longrightarrow\bar{S}_1+\bar{R}_2$

$|\bar{S}_1|+|\bar{R}_2|=|S_1'|-|S_2'|$。

证明 设W_1'的左状态为(v_l,u_l)，W_2'的右状态为(v_r,u_r)，$\bar{W}_1$的左状态为$(\bar{v}_l,\bar{u}_l)$，$\bar{W}_2$的右状态为$(\bar{v}_r,\bar{u}_r)$。为了简便起见，不妨设$u_l=0$。这时有

$(\bar{v}_l,\bar{u}_l)=(v_l,(1-A^2h)u_l)=(v_l,0)=(v_l,u_l)$，$(\bar{v}_r,\bar{u}_r)=(v_r,(1-A^2h)u_r)$。

记$P_l=(\Phi(v_l),u_l)$、$P_r=(\Phi(v_r),u_r)$、$\bar{P}_r=(\Phi(\bar{v}_r),\bar{u}_r)$，见图2。

显然$\bar{P}_r$是P_r在与u轴平行的直线上向Φ轴移动得到的。下面仅证情形3。

设$|R_1'|\geqslant|R_2'|$，记直线$\Phi=\Phi(v_r)$与稀疏波曲线R_1'的交点为P_0，$P_0=(v_0,u_0)$。若$\bar{u}_r>u_0$，即$(1-A^2h)u_r>u_0$，则有情形a)，见图3。此时显然有$|\bar{R}_1|<|R_1'|$，$|\bar{R}_2|<|R_2'|$。若$\bar{u}_r<u_0$，即$(1-A^2h)u_r<u_0$，则有情形b)，见图5。此时有$|\bar{R}_1|+|\bar{S}_2|=|R_1'|-|R_2'|$，由于$u_r-u_l=|R_1'|+|R_2'|$，因此$|\bar{S}_2|\leqslant\frac{1}{2}A^2h(|R_1'|+|R_2'|)$。对$|R_1'|<|R_2'|$的情形，可同理讨论。

类似可以证明情形1、2和4成立。

关于无耗散的方程组（1.3）的初等波的相互作用，采用文[7]证明引理2的方法，我们可以将文[6]的引理2.1中的系数做如下修改：

引理2 设$0<V_1<V_2<\infty$，下面考虑的V值都在$[V_1,V_2]$中。对初等波的相互作用，即关系（Ⅰ），下述估计成立。

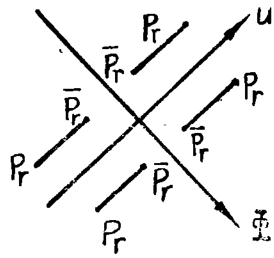

图 2

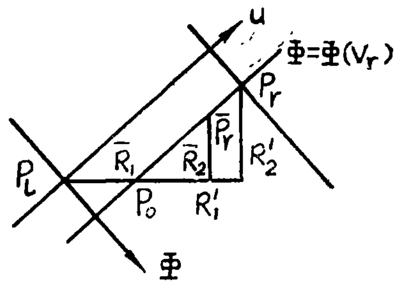

图 3

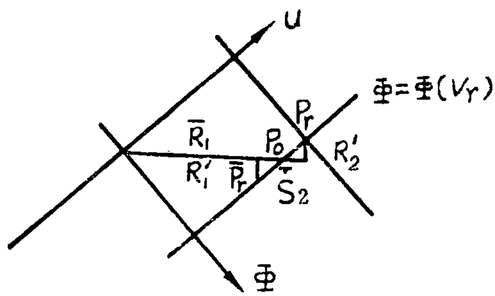

图 4

1. $R_2+S_1\longrightarrow S_1'+R_2'$

$$|S_1'|+|R_2'|=|R_2|+|S_1|$$
$$|S_1'|\leqslant|S_1| \qquad \gamma>1$$

2. $S_2+S_2^0\longrightarrow R_1'+S_2'$

$$|R_1'|+|S_2'|=|S_2|+|S_2^0|$$

3. $R_2+R_1\longrightarrow R_1'+R_2'$

$$|R_1'|=|R_1|,\quad |R_2'|=|R_2|$$

4. $S_2+S_1\longrightarrow S_1'+S_2'$

$$|S_1'|+|S_2'|\leqslant|S_1|+|S_2|, \qquad 0<\gamma\leqslant1$$
$$|S_1'|\leqslant|S_1|+C_1\varepsilon|S_2|\,|S_1|$$
$$\gamma>1$$
$$|S_2'|\leqslant|S_2|+C_1\varepsilon|S_2|\,|S_1|$$

其中 $C_1=V_2\varepsilon/K\gamma^{1/2}$。

5. a) $S_2+R_2\longrightarrow S_1'+R_2'$

$$|S_2|+|R_2|-(|S_1'|+|R_2'|)=2|S_2|\geqslant 2C_2|S_1'|.$$

b) $S_2+R_2\longrightarrow S_1'+S_2'$

存在 S_2'' 及 S_1''，使得 $S_2''+S_1''\longrightarrow S_1'+S_2'$，

$$|S_2|+|R_2|-(|S_2''|+|S_1''|)=2(|S_2|-|S_2''|)\geqslant 2C_2|S_1''|.$$

6.　a）$R_2+S_2 \longrightarrow S_1'+R_2'$

$$|R_2|+|S_2|-(|S_1'|+|R_2'|)=2|S_2|\geqslant 2C_2|S_1'|.$$

b）$R_2+S_2 \longrightarrow S_1'+S_2'$

$$|R_2|+|S_2|-(|S_1'|+|S_2'|)=2(|S_2|-|S_2'|)\geqslant 2C_2|S_1'|.$$

5及6中的常数$C_2=\min(d_1,d_2)-1>0$，$d_1=\inf\limits_{S_1}\dfrac{F_+'(\alpha)}{F_-'(\alpha)}>1$，其中$S_1$在$V_1<v<V_2$中，$d_2=\inf\limits_{S_2}\dfrac{F_+'(\alpha)}{F_-'(\alpha)}>1$，其中$S_2$在$V_1<v<V_2$中。

三、广义解的存在性

方程组（1.1）（1.2）的广义解定义为一对有界可测函数$(v,u)(t,x)$，它满足如下积分恒等式

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{0<t<T}\Big\{u\varphi_t+[P(v)]\varphi_x\Big\}dtdx+\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(x)\varphi(0,x)dx=0,\\&\iint\limits_{0<t<T}\Big\{v\varphi_t-u\varphi_x\Big\}dtdx+\int_{-\infty}^{+\infty}v_0(x)\varphi(0,x)dx=0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中$\varphi(t,x)\in C_0^\infty((0,T)\times R^1)$，以及熵不等式

$$\iint\limits_{0<t<T}\Big\{\big(\tfrac{1}{2}u^2+\int_\beta^v p(v)dv\big)\psi_t+up(v)\psi_x-A^2u\psi\Big\}dtdx+\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\tfrac{1}{2}u_0^2(x)-\int_\beta^{v_0(x)}p(v)dv\Big\}\psi(0,x)dx\geqslant 0,\tag{4.2}$$

其中β为任意正常数，$\psi(t,x)$为非负函数，$\psi(t,x)\in C_0^\infty([0,T)\times R^1)$。

由文[1]知，若前述构造的近似解$(v^l,u^l)(t,x)$本身及其对x的全变差是一致有界的，则问题（1.1）（1.2）有广义解存在。下面我们估计近似解$(v^l,u^l)(t,x)$本身及其对x的全变差的界，给出广义解的存在性定理。

关于I-曲线J，我们定义泛函

$$\begin{aligned}L(J)&=\sum(|R_1|+|R_2|+|S_1|+|S_2|),\\Q(J)&=\sum|S_2||S_1|,\\F(J)&=L(J)+M\varepsilon Q(J),\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中$L(J)$中的求和号是将跨过J的初等波R_1、R_2、S_1、S_2的强度求和。$Q(J)$中的求和号是将J上相互逼近的2-激波S_2与1-激波S_1的强度的乘积求和，$F(J)$中的M为待定常数。

设I-曲线$\bar{J}$紧跟I-曲线J，$\bar{J}$与J所夹方块状区域为△。在△中，进入的初等波为W_2+W_1，出来的初等波为$\overline{W}_1+\overline{W}_2$，我们知道它们之间的关系可分解为对关系（Ⅰ）及关系（Ⅱ）的研究：

$$W_2+W_1\longrightarrow W_1'+W_2'\Longrightarrow\overline{W}_1+\overline{W}_2,$$

其中$W_1'+W_2'$为W_2+W_1相互作用（关系(I)）后，产生的初等波。因此我们可以想象存在一条I-曲线J'，J'紧跟J，使得W_2+W_1在J上，$W_2'+W_1'$在J'上，$\overline{W}_2+\overline{W}_1$在$\bar{J}$上，

即
$$\underset{J}{W_2+W_1}\longrightarrow \underset{J'}{W_1'+W_2'}\Longrightarrow \underset{\bar J}{\bar W_1+\bar W_2}. \tag{4.4}$$

这样，关于在 J 与 $\bar J$ 上泛函 $L(\cdot)$、$F(\cdot)$之间的关系可以分解为在 J 与 J' 上的关系及 J' 与 $\bar J$ 上的关系。我们有下列引理 3—引理 6。

引理 3　设 $0<\gamma\leqslant 1$，则 $L(\bar J)<L(J)$。

证明　由引理 1 及引理 2 知$L(\bar J)<L(J')$、$L(J')<L(J)$，因此 $L(\bar J)<L(J)$。

引理 4　对 $1<\gamma\leqslant 3$，设 $0<V_1<V_2<\infty$，下面所考虑的 V 值都在$[V_1,V_2]$内，I- 曲线 J 及 $\bar J$ 在 $0<t<T$ 内，取泛函 $Q(J)$中的常数 $M=4C_1$，这里的 C_1 同引理 2。进一步假设 $F(J)\leqslant G_1$，这里 $G_1=2TV\{r_0(x),\ s_0(x)\}\cdot e^{A^2T}$。若 ε 满足 $2\varepsilon\cdot G_1/C_2<1$，则 $F(J')<F(J)$。这里 C_2 同引理 2。

证明　我们仅证明 $S_2+S_1\longrightarrow S_1'+S_2'$ 的情形，其它情形可以同理证明。由引理 2，我们有

$$L(J')-L(J)=(|S_1'|+|S_2'|)-(|S_1|+|S_2|)\leqslant 2C_1\varepsilon|S_2||S_1|,$$
$$Q(J')-Q(J)=(|S_2'|-|S_2|)\sum|S_r^1|+(|S_1'|-|S_1|)\cdot\sum|S_l^2|-|S_2||S_1|,$$

其中 S_r^1 表示在 J 上方块△(J 与 J'所夹)右边的 1- 激波，S_l^2 表示在 J 上方块△左边的 2- 激波。由于取 $M=4C_1$，ε 满足 $\varepsilon\cdot G_1\cdot M<1$，因此

$$\begin{aligned}F(J')-F(J)&\leqslant 2C_1\varepsilon|S_2||S_1|+M\varepsilon\{2C_1\varepsilon|S_2||S_1|F(J)-|S_2||S_1|\}\\&\leqslant 2C_1\varepsilon|S_2||S_1|\{-1+M\varepsilon F(J)\}\\&\leqslant 2C_1\varepsilon|S_2||S_1|\{-1+M\varepsilon G_1\}\\&<0\ .\end{aligned}$$

引理 5　设 $1<\gamma\leqslant 3$，则有

1)　若 $W_1'+W_2'=S_1'+S_2'$，则 $F(\bar J)<F(J')$

2)　若 $W_1'+W_2'$ 是除 1)之外的其它情形，则
$$F(\bar J)<[1+M\varepsilon A^2h(|W_1'|+|W_2'|)]F(J').$$

证明　1)　$W_1'+W_2'=S_1'+S_2'$，由引理 1 我们知道 $F(\bar J)<F(J')$。2)　我们仅考虑 $R_1'+S_2'\Longrightarrow\bar R_1+\bar S_2$ 的情形。由引理 1，我们有

$$L(\bar l)-L(J)=0,$$
$$\begin{aligned}Q(\bar J)-Q(J)&=(|\bar S_2|-|S_2'|)\sum|S_r^1|\\&\leqslant\tfrac{1}{2}A^2h(|R_1'|+|S_2'|)\sum|S_r'|,\end{aligned}$$

因此
$$F(\bar J)-F(J')\leqslant\tfrac{1}{2}A^2hM\varepsilon(|R_1'|+|S_2'|)F(J').$$

可同理证明引理 5 中的其它情形。

引理 6　设 $1<\gamma\leqslant 3$，$0<V_1<V_2<\infty$，下面考虑的 V 值都在$[v_1,v_2]$内，I- 曲线 J，$\bar J$ 在 $0<t<T$ 内，进一步假设 $F(J)\leqslant G_1$，这里的 G_1 同引理 4。若 ε 满足 $\varepsilon\cdot G_1\cdot M<1$，则
$$F(\bar J)\leqslant[1+M\varepsilon A^2h(|W_2|+|W_1|)]F(J). \tag{4.5}$$

证明　分二种情形证明。

1)　$W_2+W_1=S_2+S_1\longrightarrow S_1'+S_2'\Longrightarrow\bar W_1+\bar W_2$，由引理 4 及引理 5 的情形 1)我们知道
$$F(\bar J)<F(J')<F(J).$$

2） 除情形1)之外的所有情形。由引理4及引理5，我们有

$$F(\bar{J})\leqslant[1+M\varepsilon A^2h(|W_1'|+|W_2'|]F(J')$$
$$\leqslant[1+M\varepsilon A^2h(|W_1'|+|W_2'|)F(J)$$

由引理2，此时 $|W_1'|+|W_2'|\leqslant|W_2|+|W_1|$，因此

$$F(\bar{J})\leqslant[1+M\varepsilon A^2h(|W_1|+|W_2|)]F(J)。$$

现在我们可以得到广义解的存在性定理。

定理 1 设 $0<\gamma\leqslant1$，初值 $(v_0(x),u_0(x))$ 是有界变差的，并设存在常数 $\underline{V}$ 及 $\bar{V}$，使得 $0<\underline{V}<v_0(x)<\bar{V}<\infty$。当 $0<\gamma<1$ 时，还要求初值满足不等式

$$s_0-r_0<-2k\gamma^{1/2}/\varepsilon, \tag{4.6}$$

其中 $s_0=\underset{X\epsilon R1}{Sup}\, s_0(x)$，$r_0=\underset{X\epsilon R1}{\ln f}\, r_0(x)$。那么初值问题(1.1)(1.2)在 $t>0$ 上存在广义解。

证明 首先考虑 $\gamma=1$ 的情形。取在第二节中差分格式的网格步长比率(2.1)为

$$\frac{e}{h}=\frac{K}{V_1},$$

其中 $V_1=e^{1/K[2Kln\underline{V}-Kln\bar{V}-2TV\{r_0(x),s_0(x)\}]}$。容易知道 $L(0)\leqslant2TV\{r_0(x),s_0(x)\}$，其中0为在 $0\leqslant t\leqslant h$ 中的 I-曲线。由引理3，若 I-曲线 J_2 紧跟 I-曲线 J_1，则 $L(J_2)\leqslant L(J_1)$。因此对任意 I-曲线 J 有 $L(J)\leqslant L(0)$。由此我们得到

$$TV_J\{\Phi(v^l(t,x))\}\leqslant L(J)+\Phi(\bar{V})-\Phi(\underline{V}),$$
$$\Phi(\underline{V})-TV_J\{\Phi(v^l(t,x))\}\leqslant\Phi(v^l(t,x))\leqslant\Phi(\bar{V})+TV_J\{\Phi(v^l(t,x))\},$$

其中 $TV_J\{\Phi(v^l(t,x))\}$ 表示 $\Phi(v^l(t,x))$ 沿 I-曲线 J 的全变差。

若记 $V_2=e^{1/K[2Kln\bar{V}-Kln\underline{V}+2TV\{r_0(x),s_0(x)\}]}$，则有

$$0<V_1<v^l(t,x)<V_2<\infty,$$
$$TV\{v^l(t,x)\}\leqslant CV_2\cdot TV\{r_0(x),s_0(x)\}$$
$$TV\{u^l(t,x)\}\leqslant CV_2\cdot\lambda(V_1)TV\{r_0(x),s_0(x)\},$$

其中 C 为仅与 K、$\underline{V}$ 及 $\bar{V}$ 有关的正的常数。

其次，考虑 $0<\gamma<1$ 的情形。取在第二节中差分格式中的网格步长比率(2.1)为

$$\frac{l}{h}=K\sqrt{\gamma}/\underline{V}^{1+\varepsilon}.$$

为了使初值问题(1·1)(1.2)的近似解 $(v^l,u^l)(t,x)$ 在 $t>0$ 上可构造，我们要证明在考虑耗散的影响上，不等式(4.6)仍然保持。对 Φ-u 平面上的任意一点 (Φ,u)（在 r-s 平面上相应地为 $(\underline{V}r,s)$）经耗散后的值 $(\bar{\Phi},\bar{u})$，其中 $\bar{V}=v$，$\bar{\Phi}=\Phi(\bar{v})$，$\bar{u}=(1-A^2h)u$（在 r-s 平面上相应地为 $(\bar{r},\bar{s})$）。记 r-s 平面上的点集 $I(r_1,s_1)=\{(r,s)|r>r_1,s<s_1\}$。由图5易知，若

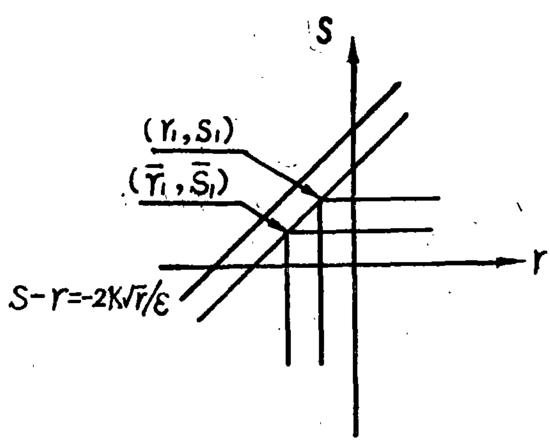

图 5

$(r,s)\in I(r_1,s_1)$，则$(\bar r,\bar s)\in I(\bar r_1,\bar s_1)$。因此，在耗散后，不等式(4.6)仍然保持，而且$v^l(t,x)\geqslant \underline{V}>0$。与$\gamma=1$的情形一样，对任意$I$-曲线$J$有$L(J)\leqslant L(O)$。我们取$V_1=\underline{V}$，因此有

$$0\leqslant \Phi(v^l(t,x))\leqslant 2\Phi(\bar v)-\Phi(\underline{V})+2TV\{r_0(x),\ s_0(x)\},$$
$$0<\underline{V}<V^l(t,x)<V_2<\infty,$$
$$TV\{v^l(t,x)\}\leqslant D_1TV\{r_0(x),\ s_0(x)\}$$
$$TV\{u^l(t,x)\}\leqslant D_2TV\{r_0(x),\ s_0(x)\}$$

这里$V_2=\Phi^{-1}(2\Phi(\bar v)-\Phi(\underline{V})+2TV\{r_0(x),\ s_0(x)\})$，$D_1=2V_1{}^{-\alpha}/K\gamma^{1/2}$，$D_2=2\lambda_2(\underline{V})\underline{V}^{-\alpha}/K\gamma^{1/2}$，$\alpha=1-\varepsilon$。

对$1<\gamma\leqslant 3$，我们得到存在性定理2。

定理 2 设初值$(v_0(x),\ u_0(x))$是有界变差的，并设存在常数$\underline{V}$及$\bar V$，使得$0<\underline{V}<V_0(x)<\bar V<\infty$。那么对$1<\gamma\leqslant 3$，存在正数$a=\frac{1}{8}\min\{\underline{V}\cdot\min\{1,\bar v^{-1}\},C_2/C_1\}$，其中$C_1$、$C_2$同引理2，当不等式

$$(\gamma-1)\cdot TV\{r_0(x),s_0(x)\}\cdot e^{A^2T}<a \tag{4.7}$$

成立时，初值问题(1.1)(1.2)在带域$[_0,T)\times R'$上存在广义解。

为了证明定理2，首先引进几个概念。设I-曲线J'紧跟I-曲线J。称J'是(n,m)-紧跟J[1]，若$[nh,y_{n,m}]$是折线J上的一个顶点，则$[(n+2)h,y_{n+2,m}]$是折线J'上的一个顶点，而且J与J'的其它顶点重合。

对固定的I-曲线J_n，J_n在$0\leqslant t\leqslant nh$中，而且J_n的首尾点都在x轴上。关于J_n可构造减序列$J_n>J_{n-1}>\cdots>J_1$，这里J_k，$k-1$、2、$\cdots n$是定义在$0\leqslant t\leqslant kh$中的I-曲线，而且折线段$J_k{}'=J_k-J_n$整个地落在带域$(k-1)h\leqslant t\leqslant kh$中。

利用引理6，我们可以证明定理2。

证明 取常数V_1及V_2为

$$\begin{aligned}V_1&=\Phi^{-1}[2\Phi(\underline{V})-\Phi(\bar V)-2TV\{r_0(x),\ s_0(x)\}e^{A^2T}],\\ V_2&=\Phi^{-1}[2\Phi(\bar V)-\Phi(\underline{V})+2TV\{r_0(x),\ s_0(x)\}\cdot e^{A^2T}].\end{aligned}\tag{4.8}$$

取在第二节中的差分格式的网格步长比率(2.1)为

$$\frac{l}{h}=k\sqrt{\gamma}/V_1{}^{1+\varepsilon}.$$

记$G=2TV\{r_0(x),\ s_0(x)\}$，易知$F(O)\leqslant G$。

任意给定$0\leqslant t\leqslant nh$，$nh<T$，内的I-曲线J_n，J_n的首尾点都在x轴上，并设$\{J_k\}_{k=1}^{n}$为前面叙述的关于J_n构造的减序列。显然J_1是O曲线在J_n内的部分。我们递推证明：$\forall k$，$1\leqslant k\leqslant n$，$F(J_k)\leqslant e^{A^2Kh}G$。容易看到，在$I$-曲线$J_k$与$J_{k-1}$之间，可以插入有限个构成$(n,m)$-紧跟的$I$-曲线$J_{k-1}(i)$，$i=1,\ 2,\ \cdots l_{k-1}$，其中$J_{k-1}(t_{k-1})=J_k$，$J_{k-1}(1)=J_{k-1}$。进一步假设$J_{k-1}(i)$与$J_{k-1}(i+1)$之间所夹方块状区域中进入的初等波为$W_2(J^i_{k-1})+W_1(J^i_{k-1})$，出来的初等波为$\bar W_1(J^i_{k-1})+\bar W_2(J^i_{k-1})$。现在假设当$J=J_k$时，有$F(J_k)\leqslant Ge^{A^2Kh}$，那么由式(4.5)可得

$$\begin{aligned}F(J_k(1))-F(J_k)&\leqslant M\varepsilon\cdot A^2h(|W_2(J^1{}_k)|+|W_1(J^1{}_k)|)L(J_k)\\ &\leqslant M\varepsilon A^2hL^2(J_k)\end{aligned}$$

因此

$$F(J_k(1)\leqslant(1+A^2h)F(J_k)\leqslant e^{A^2(K+1)h}G\leqslant e^{A^2T}.$$

同理有

$$\begin{aligned}F(J_k(2))&\leqslant F(J_k(1)+M\varepsilon A^2h(|W_2(J^2{}_k)|+|W_1(J^2{}_k)|)L(J_k(1))\\&\leqslant F(J_k)+A^2h(|W_2(J^1{}_k)|+|W_1(J^1{}_k)|+|W_2(J^2{}_k)|+|W_1(J^2{}_k)|)\\&\leqslant F(J_k)+A^2hL(J_k)\\&\leqslant c^{A^2(K+1)h}G.\end{aligned}$$

对 $F(J_k(i))$，$i=3,4,\cdots l_k$，可同理递推。因此

$$F(J_k)\leqslant e^{A^2nh}G\leqslant e^{A^2T}G.$$

$$0<V_1<V^l(t,x)<V_2<\infty$$

$$TV\{V^l(t,x)\}\leqslant 2b_1e^{A^2T}TV\{r_0(x),\ s_0(x)\},$$

$$TV\{u^l(t,x)\}\leqslant 2b_2e^{A^2T}TV\{r_0(x),\ s_0(x)\},$$

其中 $b_1=V_1{}^{-\alpha}/K\sqrt{\gamma}$，$b_2=V_1{}^{-\alpha}\lambda_2(V_1)/K\sqrt{\gamma}$，$\alpha=1-\varepsilon$。

五、附 注

对初值问题

$$\begin{cases}v_t-u_x=0,\\u_t+[p(v)]_x=-A^2u,\end{cases}\qquad t>0 \tag{5.1}$$

$$(v,u)(0,x)=(v_0(x),u_0(x)),\qquad X\in R^1 \tag{5.2}$$

其中 $p(v)\in C^2(0,\infty)$，$p'(v)<0$，$p''(v)>0$，$A=const$，假设初值满足文[5]的条件：

(1)有序性条件：即对任意的 $x_1<x_2$，有

$$-(v_2-v_1)\sqrt{-\frac{p(v_2)-p(v_1)}{v_2-v_1}}\leqslant u_2-u_1\leqslant\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{-p'(v)}\,dv, \tag{5.3}$$

其中$(v_i,u_k)=(v_0(x_i),\ u_0(x_i))$，$i=1$、2。

(2)有界性条件：

$$(v_0(\pm\infty),\ u_0(\pm\infty))=(v^\pm,u^\pm),\ |v^\pm|<\infty,\ |u^\pm|<\infty,\ v^->0. \tag{5.4}$$

若 $A=0$，文[5]已获得：初值问题(5.1)(5.2)有广义解存在，而且广义解保持初值的有序性。下述定理3指出文[5]的结论对 $A\neq0$ 也同样成立。

定理 3 若初值$(v_0(x),\ u_0(x))$满足条件(5.3)(5.4)，那么初值问题(5.1)(5.2)在 $t>0$ 上存在整体广义解，而且广义解保持初值的有序性。

证明 只要注意到，当 $A^2h<1$ 时，若(v_1,u_1)，(v_2,u_2)满足有序性条件(5.3)，那么经耗散后的值$(\bar v_1,\bar u_1)$，$(\bar v_2,\bar u_2)$，其中 $\bar v_1=v_1$，$\bar u_1=(1-A^2h)u_1$，$\bar v_2=v_2$，$\bar u_2=(1-A^2h)u_2$，也满足有序性条件(5.3)，即可得到定理的证明。

最后，笔者谨向亲切指导本项工作的林龙威教授、郑永树老师表示最深切的谢意。

参 考 文 献

〔1〕Dafermos, C. M. and Hsiao, L., Hyperbolic Systems Of Balance Laws with Inhomogeneity And Dissipation. Ind. University Math. J., 31, 4(1982).

〔2〕Nishida, T., Proc. Japan Acad., 44(1968), 642-646.

〔3〕Бахвалов, H.C., жВММФ, 10, 4(1970), 969-980.

〔4〕Nishida, T. and Smoller, J. A., Solutions in the Large for Some Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws. Comm. on pure and Appl.Math., Vol. XXVI, 183-200(1973)

〔5〕张同、郭于法，气体动力学方程组的一类始值问题．数学学报，15，3，(1965)．

〔6〕Wang J. H. and Li C. Z., Study of the Global Solutions for a Nonlinear Hyperbolic Systems. J. Math. Anal. &Appl., 85, (1982), 236-256.

〔7〕林龙威、气体动力学方程组整体解的存在性，吉林大学学报，1(1978)．

The Existent Theorems of Generalized Solutions for the Systems of Gas Dynamics with Dissipation

Liang Min

Abstract

Concerning the systems of one-dimensional isentropics gas flow in Lagrangian coordinates $v_t - u_x = 0$, $u_t + [p(v)]_x = 0$, if $p(v) = K^2V^{-\gamma}$, H. C. Бахвалов(1970)、T. Nishida (1968) and T. Nishida & J. A. Smoller (1973) have studied the existence of generalized solutions for initial value problem of the above systems respectively in the cases of $0<\gamma<1$, $\gamma=1$ and $1<\gamma\leqslant 3$. If $p=p(v)$ is general, that is, $p(v) \in c^2(0,\infty)$, $p'(v)<0$, $p''(v)>0$, T. Zhang & Y. F. Guo (1965) have given the global generalized solutions for the initial value problem when the initial data satisfies some restriction. In this paper, we try to extend the above results for the systems of gas dynamics with dissipation $v_t - u_x = 0, u_t + [p(v)]_x = -A^2u$, here $A = const.$.