

平均不等式的矩阵类似

王 志 雄

(应用数学系)

摘 要

本文证明了对于很广的一类矩阵的迹,有类似于经典的几何平均—算术平均不等式,由此可立即推得文[2]的一个结果,部分地回答了文[1]提出的问题.

一、引 言

R. Bellman 在文[1]中证明了当 A 和 B 是阶数相同的实对称正定矩阵时,恒有

$$2 \cdot \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A^2) + \text{tr}(B^2), \quad (1)$$

当且仅当 $A=B$ 时,等号成立.

他问:一般的,给定 n 个阶数相同的矩阵 A_1, A_2, \dots, A_n , 类似于平均不等式的矩阵迹不等式

$$n \cdot \text{tr}(A_1 A_2 \cdots A_n) \leq \text{tr}(A_1^n) + \text{tr}(A_2^n) + \cdots + \text{tr}(A_n^n) \quad (2)$$

是否也成立?

冯慈璜证明了当 A_1, A_2, \dots, A_n 都是上(或下)三角矩阵,且主对角线元素都是非负实数时,不等式(2)成立^[2].

本文将证明不等式(2)对另一类矩阵成立.文中使用的符号,如无另加说明,一如文[3].

二、迹代数可换矩阵类及其性质

定义1 如果对于给定的若干同阶矩阵组成的类 U , 其中任意 k 个(不必不同的)矩阵 A_1, A_2, \dots, A_k , 它们乘积的迹与因子的次序无关,则这个矩阵类 U 称为是迹 k -可换的.

因为对任意两个同阶矩阵 X 和 Y , 恒有

$$\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX), \quad (3)$$

(文[3], p.96), 故任何同阶矩阵组成的类是迹 2-可换的. 令

本文 1985 年 3 月 7 日收到.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\text{tr}(ABC) = 11 \neq \text{tr}(BAC) = 12$, 故一般的, 不是迹3-可换的.

引理1 同阶的对称矩阵组成的类是迹3-可换的, 但一般的, 不是迹4-可换的.

证明 设 A, B, C 是同阶的对称矩阵, 由式(3)得

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB), \quad (4)$$

$$\text{tr}(CBA) = \text{tr}(BAC) = \text{tr}(ACB). \quad (5)$$

又因为对任何矩阵 X , $\text{tr}X = \text{tr}X'$, 由 A, B, C 的对称性得

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ABC)' = \text{tr}(C'B'A') = \text{tr}(CBA), \quad (6)$$

由式(4), (5), (6)得引理1的前半部分. 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

则 $\text{tr}(ABCD) = 358 \neq \text{tr}(ACBD) = 359$, 得引理1的后半部分. 证毕.

定义2 给定矩阵类 U , 如果对于任意的正整数 p 和 q 及任意的矩阵 $A \in U$, 恒存在唯一矩阵 P 和 Q , 使

$$P^p = A, \quad A^q = Q, \quad P \in U, \quad Q \in U,$$

则称矩阵类 U 是封闭的.

这时, 我们称 P 为 A 的 p 次方根, 记为 $P = A^{1/p}$. 由定义2, 若矩阵类 U 封闭, 则对任意的 $A \in U$ 及任意的正有理数 r , 存在唯一的 $B \in U$, 使 $B = A^r$.

由线性代数的知识显然可得: 实对称半正定矩阵全体组成的类是封闭的, 主对角线元素是非负实数的上(或下)三角矩阵全体组成的类也是封闭的.

定义3 矩阵类 U 称为是迹代数可换的, 如果

(1) U 是封闭的;

(2) 对任意正整数 k , U 是迹 k -可换的.

引理2 设 U 是由主对角线元素为非负实数的同阶上(或下)三角矩阵全体组成的类, 则 U 是迹代数可换的; 设 V 是由主对角线元素是非负实数的同阶对角矩阵全体组成的类, 则 V 也是迹代数可换的.

证明 由线性代数理论知: U (或 V) 中矩阵 A 的任何正整数次方根存在, 且若限定在 U (或 V) 中, 是唯一的, 故 U (或 V) 是封闭的.

若 $A \in U$ (或 V) 的主对角线元素是 a_1, a_2, \dots, a_n , 则对任何正有理数 r , A^r 的主对角线元素是 $a_1^r, a_2^r, \dots, a_n^r$, 由实数之乘法交换律, 得 U (或 V) 的迹代数可换性. 证毕.

为证明我们的主要结果, 我们需要一些引理. 由于它们有独立的趣味, 我们在较宽的条件下叙述它们.

引理3 设 A 是 k 阶 Hermite 正定矩阵, T 是任意的 k 阶矩阵, 则 T^*AT 是半正定的, 若 T 是非奇异的, 则 T^*AT 是正定的.

证明 因 A 是 Hermite 矩阵, 故 T^*AT 也是 Hermite 矩阵. 又因对任意的 k 维向量 x , 由 A 之正定性得

$$(T^*ATx, \overline{x}) = (ATx, \overline{Tx}) \geq 0, \quad (7)$$

故 T^*AT 是半正定的.

式(7)中等号成立, 当且仅当 $Tx=0$, 若 T 是非奇异的, 则当且仅当 $x=0$, 得 T^*AT 的正定性. 证毕.

引理4 设 A 是 k 阶 Hermite 正定矩阵, T 是任意的 k 阶矩阵, 则 $T^*AT=0$ 当且仅当 $T=0$.

证明 充分性显然.

必要性. 若 $T^*AT=0$, 则对一切 k 维向量 X ,

$$(ATx, \overline{Tx}) = (T^*ATX, \overline{x}) = 0,$$

因为 A 是正定的, 故得: 对一切 k 维向量 x , $Tx=0$, 从而 $T=0$. 证毕.

引理5 设 A 是 Hermite 半正定矩阵, 则 $\text{tr}A \geq 0$, 当且仅当 $A=0$, 上式等号成立.

证明 显然.

引理6 设 V 是迹代数可换矩阵类, 实对称正定矩阵 $B, C \in V$, 则对任意的正整数 k ,

$$k \cdot \text{tr}(B^{k+1}) + \text{tr}(C^{k+1}) \geq (k+1) \text{tr}(B^k C).$$

等号成立, 当且仅当 $B=C$.

证明 对任意 $j (j=1, 2, \dots, k)$, 因 B 和 C 是实对称正定矩阵, 故存在实对称正定矩阵 P 和 Q , 使 $P=C^{(k-j)/2}$, $Q=B^{(j-1)/2}$. 由引理3, $(C-B)PQ^2P(C-B)$ 是半正定的, 由引理5,

$$\text{tr}[(C-B)PQ^2P(C-B)] \geq 0,$$

等号成立, 当且仅当 $QP(C-B)=0$, 因 P, Q 的正定性, 故当且仅当 $B=C$, 又因 V 是迹代数可换的, 故 $P \in V, Q \in V$ 且

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(C-B)PQ^2P(C-B)] \\ &= \text{tr}(CPQ^2PC) - \text{tr}(BPQ^2PC) - \text{tr}(CPQ^2PB) + \text{tr}(BPQ^2PB) \\ &= \text{tr}(Q^2P^2C^2) - 2\text{tr}(BQ^2P^2C) + \text{tr}(B^2Q^2P^2) \\ &= \text{tr}(B^{j-1}C^{k-j+1}) - 2\text{tr}(B^jC^{k-j+1}) + \text{tr}(B^{j+1}C^{k-j}) \geq 0. \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} & k\text{tr}(B^{k+1}) + \text{tr}(C^{k+1}) - (k+1)\text{tr}(B^k C) \\ &= \sum_{j=1}^k j \left[\text{tr}(B^{j-1}C^{k-j+1}) - 2\text{tr}(B^jC^{k-j+1}) + \text{tr}(B^{j+1}C^{k-j}) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

等号成立, 当且仅当 $B=C$. 证毕.

三、主要定理的证明

定理1 设 V 是迹代数可换矩阵类, A_1, A_2, \dots, A_n 是 V 中的实对称正定矩阵, 则

$$\text{tr}(A_1^n) + \text{tr}(A_2^n) + \dots + \text{tr}(A_n^n) \geq n \cdot \text{tr}(A_1 A_2 \dots A_n),$$

等号成立, 当且仅当 $A_1 = A_2 = \dots = A_n$.

证明 对 n 行数学归纳法.

当 $n=2$ 时, 命题显然成立^[1].

设命题当 $n=k$ ($k \geq 2$) 时成立, 则当 $n=k+1$ 时, 令 $B_1 = A_1^{1/k}, \dots, B_k = A_k^{1/k}$. 由定义3, B_1, \dots, B_k 存在, 且也在 V 中, 同时, B_1, \dots, B_k 如 A_1, \dots, A_k 也是实对称正定的, 由归纳假设

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}(A_1^{k+1}) + \dots + \operatorname{tr}(A_k^{k+1}) + \operatorname{tr}(A_{k+1}^{k+1}) \\ &= \operatorname{tr}[(B_1^{k+1})^k] + \dots + \operatorname{tr}[(B_k^{k+1})^k] + \operatorname{tr}(A_{k+1}^{k+1}) \\ &\geq k \operatorname{tr}(B_1^{k+1} \dots B_k^{k+1}) + \operatorname{tr}(A_{k+1}^{k+1}) \\ &= k \operatorname{tr}[(B_1^{1/2} \dots B_k^{1/2} B_k^{1/2} \dots B_1^{1/2})^{k+1}] + \operatorname{tr}(A_{k+1}^{k+1}). \end{aligned}$$

由引理6, 上式

$$\begin{aligned} &\geq (k+1) \operatorname{tr}[(B_1^{1/2} \dots B_k^{1/2} B_k^{1/2} \dots B_1^{1/2})^k A_{k+1}] \\ &= (k+1) \operatorname{tr}(B_1^k \dots B_k^k A_{k+1}) \\ &= (k+1) \operatorname{tr}(A_1 \dots A_k A_{k+1}). \end{aligned}$$

等号成立, 由归纳假设及引理6, 当且仅当

$$B_1^{k+1} = \dots = B_k^{k+1}, \quad A_{k+1} = B_1^{1/2} \dots B_k^{1/2} B_k^{1/2} \dots B_1^{1/2},$$

即当且仅当 $A_1 = \dots = A_k = A_{k+1}$. 证毕.

四、若 干 评 注

由定理1可立即得到

推论1 (冯慈璜) 当 A_1, A_2, \dots, A_n 都是上(或下)三角矩阵, 且主对角线元素都是非负实数, 则不等式(2)成立.

证明 设 V 是由主对角线元素是非负实数的与 A_i 阶数相同的对角矩阵全体组成的类, 由引理2, V 是迹代数可换的. 令 B_i 与 A_i 有相同的主对角线元素, $B_i \in V$, 则 B_i 是半正定的, 直接计算可得

$$\operatorname{tr}(B_i^n) = \operatorname{tr}(A_i^n), \quad \operatorname{tr}(B_1 \dots B_n) = \operatorname{tr}(A_1 \dots A_n),$$

注意到定理1及有关引理, 如不考虑等号成立的情况, 正定性条件可放宽为半正定的, 从而, 立得不等式(2). 证毕.

当 $n=3$, 我们不必要求迹代数可换条件, 仍能保证不等式(2)的正确性. 为此, 须采用另一种方法加以证明.

定理2 设 A, B, C 是实对称正定矩阵, 则

$$\operatorname{tr}(A^3) + \operatorname{tr}(B^3) + \operatorname{tr}(C^3) \geq 3 \operatorname{tr}(ABC), \quad (8)$$

等号成立, 当且仅当 $A=B=C$.

证明 因为 A, B, C 是正定的, 故 $A+B+C$ 也是正定的. 由引理3,

$$(A-B)^*(A+B+C)(A-B) = (A-B)(A+B+C)(A-B)$$

是半正定的. 由引理5,

$$\operatorname{tr}[(A-B)(A+B+C)(A-B)] \geq 0, \quad (9)$$

等号成立, 当且仅当 $(A-B)(A+B+C)(A-B) = 0$, 由引理4, 当且仅当 $A=B$.

由式(9)得

$$\text{tr}(A^3 + ABA + ACA - BA^2 - B^2A - BCA - A^2B - AB^2 - ACB + BAB + B^3 + BCB) \geq 0,$$

由熟知的恒等式 $\text{tr}(X \pm Y) = \text{tr}X \pm \text{tr}Y$, (文[3], p.96)

$$\begin{aligned} \text{得} \quad & \text{tr}(A^3) + \text{tr}(ABA) + \text{tr}(ACA) - \text{tr}(BA^2) - \text{tr}(B^2A) - \text{tr}(BCA) \\ & - \text{tr}(A^2B) - \text{tr}(AB^2) - \text{tr}(ACB) + \text{tr}(BAB) + \text{tr}(B^3) + \text{tr}(BCB) \geq 0, \end{aligned}$$

利用式(3)得

$$\text{tr}(ABA) = \text{tr}(BA^2), \quad \text{tr}(AB^2) = \text{tr}(BAB),$$

$$\text{tr}(ACA) = \text{tr}(A^2C), \quad \text{tr}(BCB) = \text{tr}(B^2C),$$

利用引理1得

$$\text{tr}(BCA) = \text{tr}(ACB) = \text{tr}(ABC),$$

从而, 式(10)可化简为

$$\text{tr}(A^3) + \text{tr}(B^3) + \text{tr}(A^2C) + \text{tr}(B^2C) - \text{tr}(B^2A) - \text{tr}(A^2B) \geq 2\text{tr}(ABC), \quad (11)$$

同理可证

$$\text{tr}(B^3) + \text{tr}(C^3) + \text{tr}(B^2A) + \text{tr}(C^2A) - \text{tr}(C^2B) - \text{tr}(B^2C) \geq 2\text{tr}(ABC), \quad (12)$$

$$\text{tr}(C^3) + \text{tr}(A^3) + \text{tr}(C^2B) + \text{tr}(A^2B) - \text{tr}(A^2C) - \text{tr}(C^2A) \geq 2\text{tr}(ABC), \quad (13)$$

式(11), (12), (13)的等号成立, 分别当且仅当

$$A = B, B = C, C = A. \quad (14)$$

由式(11), (12), (13)得式(8), 且式(8)等号成立, 当且仅当式(14)的三个等式同时成立, 即 $A = B = C$. 证毕.

参 考 文 献

- [1] Bellman R., Some Inequalities For Positive Define Matrices, General Inequalities 2 (Backenbach E.F. Ed.), Birkhuser Verlag, (1980), 89—90.
- [2] 冯慈璜, 关于某些不等式的注记, 杭州大学学报(自然科学版), 11, 1(1984), 25—27.
- [3] Bellman R., Introduction to Matrix Analysis, MCGRAW-HALL Book Company, (1970).

The Matrix Similarity of Mean Inequality

Wang Zhixiong

Abstract

In this paper we prove:

Theorem 1 For any integer k and any rational numbers r_1, \dots, r_k , the trace of the product $A_{i_1}^{r_1}, \dots, A_{i_k}^{r_k}$ doesn't depend on the order of these factors, where $A_{i_j} \in \{A_1, \dots, A_n\}$ and A_1, \dots, A_n all are real symmetrical positive definite matrices, then

$$\text{tr}(A_1^n) + \dots + \text{tr}(A_n^n) \geq n \text{tr}(A_1 \dots A_n), \quad (2)$$

the equality holds if and only if $A_1 = \dots = A_n$.

Theorem 2 If A, B, C are all real symmetric positive definite matrices, then

$$\text{tr}(A^3) + \text{tr}(B^3) + \text{tr}(C^3) \geq 3 \text{tr}(ABC),$$

the equality holds if and only if $A = B = C$.