第6卷 第4期　　华侨大学学报　　Vol.6 No.4
1985年11月　　JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY　　Nov. 1985

非一致线性抛物型方程广义解的存在性及唯一性

梁学信

（应用数学系）

摘　　要

Galerkin方法是证明各类型偏微分方程边值问题解存在的重要方法，本文将Galerkin方法应用于非一致线性抛物型方程，构造广义解的近似解，证明其弱收敛的极限函数就为广义解。此外还证明解的唯一性，它们是一致线性抛物型方程结果的推广。

Galerkin方法已广泛应用于构造各种类型偏微分方程的边值问题解、例如文[1]、[2]应用构造一致线性抛物型方程的广义解，最近[3]和[4]又分别成功地应用于退缩椭园型方程，及强奇系数拟线性抛物型方程的第一边值问题。文[1]、[2]、[4]研究的是一致抛物型方程，对非一致方程的讨论目前还不多。本文将Galerkin方法进一步应用于非一致线性抛物型方程，证明广义解的存在性，此外还证明解的唯一性。

（一）定义及引理

设Ω是R^n空间中的有界域，$Q=\Omega\times(0,T]$、T是限数．记

$$S=\{(x,t)|\,x\in\partial\Omega,0<t<T\}.$$

在Q中研究非一致线性抛物型方程

$$u_t-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b_i(x,t)u+f_i(x,t)\right)$$

$$+c_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d(x,t)u+g(x,t)=0 \tag{1}$$

满足条件

$$u|_S=0,\qquad u|_{t=0}=\varphi(x) \tag{2}$$

的广义解．

设$\partial\Omega\in A^2$(见[2])，

本文1985年4月19日收到。

$$0\leq\lambda(x,t)|\xi|^2\leq a_{ij}(a,t)\xi_i\xi_j\leq\Lambda(x,t)|\xi|^2,\forall\xi\in R^n,$$

且 $\lambda^{-1}(x,t)\in L^s(Q),\ \Lambda(x,t)\in L^{s*}(Q)$,

其中 $S>\frac{n}{2},\quad \frac{1}{s*}+\frac{2}{l}<1,\quad l=2(1+\frac{2s-n}{n(s+1)})$。

我们用 $\tilde{W}_2^{1,1}(Q)$ 表示 c^1 类函数在范数

$$\|u\|_{\tilde{W}_2^{1,1}(Q)}=\left\{\int_0^T\int_\Omega(u^2{}_t+a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial u_j}+\Lambda(x,t)u^2)dxdt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

下完成备化的线性空间。$\mathring{\tilde{W}}_2^{1,1}(Q)$ 是 $\tilde{W}_2^{1,1}(Q)$ 的子空间，其函数在 Соболев 意义下在 S 为0。范数为

$$\|u\|_{\mathring{\tilde{W}}_2^{1,1}(Q)}=\left\{\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{x\partial_i}dxdt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$\mathring{\tilde{W}}_2^{1,0}(Q)$ 是内积为

$$(u,v)_{\mathring{\tilde{W}}_2^{1,0}(Q)}=\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial xi}\frac{\partial v}{\partial xj}d\cdot dt$$

的Hilbert空间。$\mathring{\tilde{V}}_2(Q)$ 是 $\tilde{W}_2^{1,0}(Q)$ 中具有有限范数

$$\|u\|_{\mathring{\tilde{V}}_2(Q)}=\operatorname*{vrai\ max}_{0\leq t\leq T}\left(\int_\Omega u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

的元组成的Banach空间。

引理 设 $v\in\mathring{\tilde{V}}^2(Q)$，则存在 $l=2(1+(2s-n)/n(s+1))$ 及依赖于 $n,s,\lambda^{-1}(x,t)\in L^s(Q)$ 的范数，而不依赖于 v 的常数 $c>0$，使

$$\|v\|_{L^l(Q)}\leq c\left(\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt+\operatorname*{vrai\ max}_{0\leq t\leq T}\int_\Omega v^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

证 设 $m=2s/(s+1)$，则 $s=m/(2-m)$，$l=m(1+2/n)$，由Hölder不等式得

$$\int_0^T\int_\Omega|\nabla v|^mdxdt\leq\|\lambda^{-1}\|^{m/2}_{L^s(Q)}\left(\int_0^T\int_\Omega\lambda(x,t)|\nabla v|^2dxdt\right)^{m/2}$$

$$\leq\|\lambda^{-1}\|^{m/2}_{L^s(Q)}\left(\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt\right)^{m/2}. \tag{3}$$

另一方面，由Hölder不等式及嵌入定理

$$\int_\Omega|v|^ldx\leq\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{m/n}\left(\int_\Omega|v|^{nm/(n-m)}dx\right)^{(n-m)/n}$$

$$\leq\frac{(n-1)m}{n^{1/2}(n-m)}\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{m/n}\int_\Omega|\nabla v|^mdx.$$ [5]

所以由式(3)及Young不等式得

$$\int_0^T\int_\Omega|v|^ldxdt\leq\frac{(n-1)m}{n^{1/2}(n-m)}\operatorname*{vrai\ max}_{0\leq t\leq T}\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{m/n}\int_0^T\int_\Omega|\nabla v|^mdxdt$$

$$\leq c_1\left(\operatorname*{vrai\ max}_{0\leq t\leq T}\int_\Omega v^2dx\right)^{(l-m)/2}\left(\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt\right)^{m/2}$$

$$\leqslant c^l\left(\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt+\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega v^2dx\right)^{l/2}.$$

其中 c 仅依赖于 $n, s, \|\lambda^{-1}\|_{L^s(Q)}$. 引理证完。

由 $\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2dx=2\int_\Omega vv_t\,dx\leqslant\int_\Omega v^2dx+\int_\Omega v_t^2dx$，知对 $\forall v\in\left\{v\,|\,v\in\mathring{W}_2^{1,1}(Q),\ v(x,T)=0\right\}$

及 $\forall t\in[0,T]$，有 $\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c\|v\|_{\mathring{W}_2^{1,1}(Q)}$

因此由引理便得，对 $\forall v\in\left\{v\,|\,v\in\mathring{W}_2^{1,1}(Q),\ v(x,T)=0\right\}$ 有

$$\|v\|_{L^l(Q)}\leqslant c\|v\|_{\mathring{W}_2^{1,1}(Q)}.\tag{4}$$

成立。其中 l 同引理。

定义　如果 $u\in\mathring{V}_2(Q)$，且对

$\forall v\in\{v|\ v\in\mathring{W}_2^{1,1}(Q),\ v(x,T)=0\}$ 成立恒等式

$$\int_0^T\int_\Omega\left\{-uv_t+\frac{\partial v}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b_i(x,t)u+f_i(x,t)\right)\right.$$

$$\left.+v\left(c_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d(x,t)u+g(x,t)\right)\right\}dxdt$$

$$=\int_\Omega\varphi(x)v(x,0)dx.\tag{5}$$

则称 $u\in\mathring{V}_2(Q)$ 为方程（1）的满足边值式（2）的广义解。

（二）广义解的唯一性

设下面的条件成立

$$\left.\begin{array}{l}0\leqslant\lambda(x,t)\,|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda(x,t)\,|\xi|^2,\forall\xi\in R^n,\\ \lambda^{-1}(x,t)\in L^s(Q),\ \Lambda(x,t)\in L^{s^*}(Q),\end{array}\right\}\tag{6}$$

且

$$s>\frac{n}{2},\ \frac{1}{s*}+\frac{2}{l}<1,\ l=2\left(1+\frac{2s-n}{n(s+1)}\right).$$

$$\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)},\ \frac{c_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)},\ d(x,t)\in L^q(Q),\tag{7}$$

$$\frac{1}{q}<\frac{2s-n}{s(n+2)}.$$

$$f_i(x,t)\in L^{q^*}(Q),\ q^*=\frac{2s}{s-1}.\tag{8}$$

$$g(x,t)\in L^{l'}(Q),\ \frac{1}{l'}+\frac{1}{l}=1.\tag{9}$$

$$\varphi(x)\in L^2(\Omega).\tag{10}$$

定理 1　设条件（6）——（10）成立，那么方程（1）的满足始边值式（2）的广义解

$u\in\overset{\circ}{V}_2(Q)$ 是唯一的。

证 我们将证明，在定理条件下成立不等式

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_2(Q)}\leqslant c\left(\sum\|f_i(x,t)\|^2_{L^{q*}(Q)}+\|g(x,t)\|^2_{L^{l'}(Q)}+\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

及

$$\|u\|^2_{L^l(Q)}\leqslant c\left(\sum\|f_i(x,t)\|^2_{L^{q*}(Q)}+\|g(x,t)\|^2_{L^{l'}(Q)}+\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

其中 c 依赖于 $n,q,s,q*,\mathrm{mes}Q$，及 $d_i^2(x,t)/\lambda(x,t)$，$c_i^2(x,t)/\lambda(x,t)$，$d(x,t)\in L^q(Q)$，$\lambda^{-1}(x,t)\in L^s(Q)$ 的范数。

由此便得广义解的唯一性。

设 $u=we^{\mu t}$，$\mu>0$ 是常数，由下面确定。那么 $w\in\overset{\circ}{V}{}^2(Q)$，取 $v=w\eta(t)e^{-\mu t}$，其中

$$\eta(\tau)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\tau<t-\varepsilon,\\ (t-\tau)/\varepsilon, & t-\varepsilon\leqslant\tau<t,\\ 0, & t\leqslant\tau\leqslant T,\end{cases}\qquad \forall t\in(0,T].$$

以 v 代入式（5），并将第一项分部积分，然后令 $\varepsilon\to0$ 得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(x,t)dx+\int_0^t\int_\Omega\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}+\mu w^2\right)dxdt$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\left\{\frac{\partial w}{\partial x_i}\left(b_i(x,t)w+f_i(x,t)e^{-\mu t}\right)+w\left(c_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}+d(x,t)w+g(x,t)e^{-\mu t}\right)\right\}dxdt$$

$$=\int_\Omega\varphi(x)w(x,0)dx-\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(x,0)dx.$$

因为上式不含 w 对 t 的导数，所以可对 $w\in c^1(\bar{Q})$，$w\big|_S=0$ 的函数导出上式，再通过极限手续，知上面运算合理，上式对 $w\in\overset{\circ}{V}{}^2(Q)$ 仍成立。

应用 Cauchy 不等式，并注意到条件（6）及 $e^{-\mu t}\leqslant1$ 得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(x,t)dx+\int_0^t\int_\Omega\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}+\mu w^2\right)dxdt$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\left\{\left(\frac{\sum c_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}+\frac{\sum b_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}+d(x,t)\right)w^2\right.$$

$$\left.+\frac{\sum f_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}e^{-2\mu t}+|g(x,t)w|e^{-2\mu t}\right\}dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega\varphi^2(x)dx$$

$$\leqslant c_1\int_0^t\int_\Omega\left\{a(x,t)w^2+\frac{\sum f_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}+|g(x,t)w|\right\}dxdt+\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

其中

$$a(x,t)=\frac{\sum b_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}+\frac{\sum c_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}+d(x,t)\in L^q(Q).$$

应用 Hölder 不等式，由上面不等式有

$$\int_\Omega w^2(x,t)dx+\int_0^t\int_\Omega\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}+\mu w^2\right)dxdt$$

$$\leqslant c_1\left\{\|a(x,t)\|_{L^l(Q)}\|w\|^2_{L^{l*}(Q)}+\|\lambda^{-1}(x,t)\|_{L^s(Q)}\sum\|f_i(x,t)\|^2_{L^{q*}(Q)}\right.$$

$$+\varepsilon_1\|w\|^2_{L^l(Q)}+c(\varepsilon,l)\|g(x,t)\|^2_{L^{l'}(Q)}\}+\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{11}$$

其中
$$2<l^*=\frac{2q}{q-1}<\frac{2s(n+2)}{n(s+1)}=l\ .$$

左边对 t 求上确界，并应用 $L^q(Q)$ 的内插不等式

$$\|w\|_{L^{l^*}(Q)}\leqslant\varepsilon_2\|w\|_{L^l(Q)}+\varepsilon_2^{-\nu}\|w\|_{L^2(Q)},$$

$$\nu=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{l^*}\right)\Big/\left(\frac{1}{l^*}-\frac{1}{l}\right).$$

由式(11)得

$$\begin{aligned}&\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega w^2dx+\int_0^T\int_\Omega\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}+\mu w^2\right)dxdt\\&\leqslant c_1\{\|a(x,t)\|_{L^q(Q)}(\varepsilon_2\|w\|^2_{L^l(Q)}+c_2(\varepsilon_2,l,l^*)\|u\|^2_{L^2(Q)})+\varepsilon_1\|w\|^2_{L^l(Q)}\}\\&+c_3\left(\sum\|f_i(x,t)\|^2_{L^{q^*}(Q)}+\|g(x,t)\|^2_{L^{l'}(Q)}\right)+\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

再由引理有

$$\begin{aligned}&\|w\|^2_{L^l(Q)}+\mu c^2\int_0^T\int_\Omega w^2dxdt\\&\leqslant c^2c_1\{(\varepsilon_2\|a(x,t)\|_{L^q(Q)}+\varepsilon_1)\|w\|^2_{L^l(Q)}+c^2\|a(x,t)\|_{L^q(Q)}\|w\|^2_{L^2(Q)}\\&+c^2c_3\left(\sum\|f_i(x,t)\|^2_{L^{q^*}(Q)}+\|g(x,t)\|^2_{L^{l'}(Q)}\right)+c^2\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

c 是引理中的常数。我们先取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 充分小，使 $c^2c_1(\varepsilon_2\|a(x,t)\|_{L^q(Q)}+\varepsilon_1)=\frac{1}{2}$，再取 $\mu=\mu_0$，使 $\mu_0>c_1c_2\|a(x,t)\|_{L^q(Q)}$，

那么便得

$$\|w\|^2_{L^l(Q)}\leqslant c_4\mathrm{K}$$

及

$$\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega u^2dx+\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}dxdt\leqslant c_4\mathrm{K}.$$

回到函数 u，最后得

$$\|u\|^2_{L^l(Q)}\leqslant c_4e^{2\mu_0T}\mathrm{K},$$

$$\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega w^2dx+\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt\leqslant c_4e^{2\mu_0T}K\ .$$

其中
$$K=\sum\|f_i(x,t)\|^2_{L^{q^*}(Q)}+\|g(x,t)\|^2_{L^{l'}(Q)}+\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

（三）广义解的存在性

现在用 Galerkin 方法构造广义解的近似解 $u^N(x,t)$，并证明其极限函数就是式(1),(2)的广义解。

定理 2　设条件(6)——(10)成立，那么问题(1)、(2)存在唯一的广义解 $u(x,t)\in\overset{\circ}{V}_2(Q)$，且可用下面式(12)的 $u^N(x,t)$ 来逼近。

证　设 $\{\psi_k(x)\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交系，$\psi_k(x)\in \overset{\circ}{C}{}^2_0(\Omega)$。

作近似解

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_K^N(t)\psi_k(x)。\tag{12}$$

为确定 $\alpha_k^N(t)$，作

$$\int_\Omega\left\{\psi_k(x)\frac{\partial u^N}{dt}+\frac{\partial\psi_k(x)}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial x_j}+b_i(x,t)u^N+f_i(x,t)\right)\right.$$

$$\left.+\psi_k(x)\left(c_i(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial x_i}+d(x,t)u^N+g(x,t)\right)\right\}dx=0,\tag{13}$$

$$k=1,2,\cdots,N,\quad 0\leqslant t\leqslant T。$$

因 $\{\psi_k(x)\}$ 是正交系，所以由上式得

$$\frac{d\alpha_k^N(t)}{dt}=\sum_{S=1}^{N}A_{ks}(t)\alpha_s^N+B_k(t)\tag{13}$$

$$k=1,2,\cdots,N,\quad 0\leqslant t\leqslant T。$$

根据方程(1)系数可积性条件的假定，知 $A_{ks}(t),B_k(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 可积。

另一方面，因 $\varphi(x)\in L^2(\Omega)$，所以存在

$$\varphi^N(x)=\sum_{k=1}c_k^N\psi k(x)\Rightarrow\varphi(x)(L^2(\Omega)),\tag{15}$$

$\Rightarrow$表示强收敛。

由
$$u^N(x,0)\equiv\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N(0)\psi_k(x)=\varphi^N(x)=\sum_{k=1}^{N}c_k^N\psi_k(x)$$

确定

$$\alpha_k^N(0)=c_k^N,\qquad k=1,2,\cdots,N。\tag{16}$$

解方程组的始值问题式(14),(16)，对每个 N 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 可唯一确定 $c_k^N(t)$，从而确定出 $u^N(x,t)$。

以 $\alpha_k^N(t)e^{-2\mu t}$ 乘式(13)，记 $w^N=u^Ne^{-\mu t}$（$\mu>0$ 是常数），然后对 k 从 1 到 N 求和，并对 t 积分得

$$\int_0^t\int_\Omega\left\{w^Nw_t^N+\mu(w^N)^2+\frac{\partial w^N}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial w^N}{\partial x_j}+b_i(x,t)w^N+f_i(x,t)e^{-\mu t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+w^N\left(c_i(x,t)\frac{\partial w^N}{\partial x_i}+d(x,t)w^N+g(x,t)e^{-\mu t}\right)\right)\right\}dxdt=0。$$

注意到 $w^N(x,0)=u^N(x,0)\Rightarrow\varphi(x)(L^2(\Omega))$，用证明定理 1 的方法，得对 $w^N(x,t)$ 从而 $u^N(x,t)$ 及 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N_0>0$，当 $N\geqslant N_0$ 时

$$\|u^N\|^2_{L^1(Q)}\leqslant cK+\varepsilon,\tag{17}$$

$$\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega|u^N|^2dx+\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial x_i}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}dxdt$$
$$\leqslant cK+\varepsilon。$$

其中 K 同定理 1，c 不依赖于 u^N 及 N。

因此知 $u^N(x,t)$ 在 $L^1(Q)$ 中弱收敛，设弱收敛于 $u(x,t)$，设为

$$u^N(x,t) \longrightarrow u(x,t)(L^1(Q)). \tag{19}$$

$\longrightarrow$ 表示弱收敛，并由式(6)及(18)知

$$\sqrt{\lambda(x,t)}\frac{\partial u^N}{\partial x_i} \longrightarrow \sqrt{\lambda(x,t)}\frac{\partial u}{\partial x_i}(L^2(Q)). \tag{20}$$

再同[1](第三章§4)一样，证明 $u^N(x,t) \longrightarrow u(x,t)(L^2(\Omega))$，且关于 $t\in[0,T]$ 是一致的，及 $u(x,t)\in \tilde{V}_2(Q)$。

下面证 $u(x,t)$ 满足方程(5)。先设 $v(x,t)$ 在 $\bar{Q}$ 无穷可微，且在 Q 的边界为0，那么存在

$$v^m(x,t)=\sum_{k=1}^m c_k^m(t)\psi_k(x)$$

$$c_k^m(0)=c_k^m(T)=0, \qquad k=1,2,\cdots, m.$$

使　$v^m(x,t)\Rightarrow v(x,t)(\overset{\circ}{\tilde{W}}{}_2^{1,1}(Q))$

以 $c_k^m(t)$ 乘式(13)，对 k 从1到 m 求和，对 t 积分，并将第一项分部积分得

$$\int_0^T\int_\Omega\Big\{-u^N v_t^m+\frac{\partial v^m}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial x_j}+b_i(x,t)u^N+f_i(x,t)\Big)$$

$$+v^m\Big(c_i(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial x_i}+d(x,t)u^N+g(x,t)\Big)\Big\}dxdt=0. \tag{21}$$

先固定 m，使 $N\longrightarrow\infty$，考虑式(21)中各项的收敛性。因

$v_t^m\in L^2(Q)$ 及式(19)，所以

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T\int_\Omega -u^N v_t^m dxdx=\int_0^T\int_\Omega -u v_t^m dxdt.$$

记 $\frac{1}{p}=\frac{1}{s^*}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}$，则 $p>1$，且

$$\int_0^T\int_\Omega |a_{ij}(x,t)\frac{\partial v^m}{\partial x_i}|^p dxdt\leqslant\int_0^T\int_\Omega \Lambda^p(x,t)\,|\nabla v^m|^p dxdt$$

$$\leqslant\|\Lambda(x,t)\|^p_{L^{s*}(Q)}\|\lambda(\nabla v^m)\|^p_{L^2(Q)}\|\lambda^{-1}(x,t)\|^{p/2}_{L^s(Q)}.$$

所以

$a_{ij}(x,t)(\partial v^m/\partial x_i)\in L^p(Q)$，而 $L^p(Q)$ 是可分空间，存在可列的稠密集，对这个稠密集，从而对整个空间，下面的极限成立

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial v^m}{\partial x_i}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}dxdt=\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial v^m}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dxdt.$$

因 $1/l'=1-1/l$，所以 $1<l'<2$，且 $l'/(2-l')=l/(l-2)<q$ 及

$$\int_0^T\int_\Omega| b_i(x,t)\frac{\partial v^m}{\partial x_i}|^{l'}dxdt$$

$$\leqslant\Big(\int_0^T\int_\Omega\lambda(x,t)\,|\nabla v^m|^2dxdt\Big)^{\frac{l'}{2}}\Big(\int_0^T\int_\Omega|\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}|^q dxdt\Big)^{\frac{l'}{2q}}(\mathrm{mes}Q)^{1-\frac{l'}{2}-\frac{l'}{2q}}$$

$$\leqslant\|v^m\|^{l'}_{\overset{\circ}{\tilde{W}}{}_2^{1,1}(Q)}\Big\|\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}\Big\|^{l'/2}_{L^q(Q)}(\mathrm{mes}Q)^{1-\frac{l'}{2}-\frac{l'}{2q}}.$$

因此 $b_i(x,t)\partial v^m/\partial x_i \in L^{l'}(Q)$，再由式（19）便得

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T\int_\Omega b_i(x,t)\frac{\partial v^m}{\partial x_i}u^N dxdt=\int_0^T\int_\Omega b_i(x,t)\frac{\partial v^m}{\partial x^i}udxdt\ .$$

因

$$\int_0^T\int_\Omega \lambda^{-1}(x,t)\,|c_i(x,t)v^m|^2dxdt$$

$$\leqslant\left\|\frac{c_i^2(x,t)}{\lambda(x,t)}\right\|_{L^q(Q)}\|v^m\|^2_{L^l(Q)}(\mathrm{mes}Q)^{1-\frac{1}{q}-\frac{2}{l}}.$$

所以

$$\frac{c_i(x,t)}{\sqrt{\lambda(x,t)}}v^m\in L^2(Q)，再由(20)得$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T\int_\Omega c_i(x,t)v^m\frac{\partial u^N}{\partial x_i}dxdt=\int_0^T\int_\Omega c_i(x,t)v^m\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt.$$

因 $$\int_0^T\int_\Omega |d(x,t)v^m|^{l'}dxdt\leqslant\|d(x,t)\|^{l'}_{L^q(Q)}\|v^m\|^{l'}_{L^l(Q)}(\mathrm{mes}Q)^{1-l'/q-l'/l}.$$

所以

$d(x,t)v^m\in L^{l'}(Q)$，再由（19）得

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T\int_\Omega d(x,t)v^m u^N dxdt=\int_0^T\int_\Omega d(x,t)v^m udxdt.$$

综合以上讨论，由（21）得

$$\int_0^T\int_\Omega\Big\{-uv_t^m+\frac{\partial v^m}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b_i(x,t)u+f_i(x,t)\Big)$$

$$+v^m\Big(c_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d(x,t)u+g(x,t)\Big)\Big\}dxdt=0$$

由于 $u\in\overset{\circ}{V}_2(Q)$，引理及关于系数可积条件的假定，类似地讨论，$m\to\infty$ 时，由上式得

$$\int_0^T\int_\Omega\Big\{-uv_t+\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b_i(x,t)u+f_i(x,t)\Big)$$

$$+v\Big(c_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d(x,t)u+g(x,t)\Big)\Big\}dxdt=0.\tag{22}$$

通过极限，知对 $\forall v\in\{v\,|\,v\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q),\ v(x,0)=v(x,T)=0\}$ 上式仍成立。

对仅在 $t=T$ 为 0 的 $\forall v\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$，作

$$\eta(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\varepsilon}, & 0\leqslant t<\varepsilon,\\[2mm] 1, & \varepsilon\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

则 $\bar v=v\eta(t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$，且 $\bar v(x,0)=\bar v(x,T)=0$，以 $\bar v$ 代替（22）中的 v，其中第一个积分为

$$-\int_0^T\int_\Omega u\bar v_t dxdt=-\int_0^T\int_\Omega u\eta v_t dxdt-1/\varepsilon\int_0^\varepsilon\int_\Omega uvdxdt.$$

从 $u\in\overset{\circ}{V}_2(Q)$，$v(x,t)\in L^2(\Omega)$ 知 $\int_\Omega uvdx$ 在 $t\in[0,T]$ 可积，令 $\varepsilon\to 0$ 有

$$1/\varepsilon\int_0^\varepsilon\int_\Omega u(x,t)v(x,t)dxdt\longrightarrow\int_\Omega u(x,0)v(x,0)dx=\int_\Omega\varphi(x)v(x,0)dx.$$

因此，以 $\bar{v}$ 代替 (22) 中的 v，令 $\varepsilon\to 0$ 最后得对

$\forall v\in\{v\,|\,v\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q),\ v(x,T)=0\}$，$u(x,t)$ 满足恒等式

$$\int_0^T\int_\Omega\Big\{-uv_t+\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}+b_i(x,t)u+f_i(x,t)\Big)$$

$$+v\Big(c_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d(x,t)u+g(x,t)\Big)\Big\}dxdt=\int_\Omega\varphi(x)v(x,0)dx.$$

定理证完。

参　考　文　献

〔1〕Ladyženckaia O. A., Solonnikov V. A., and Ural'ceva N. A., Linear and quasi-linear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc., (1968).

〔2〕Ильин A. M., Калашников A. C., Олеиник O. A., линеиные уравнения пароболилеского второго пароболилеского второго порядка, УМН, 17, 3(1962), 3—141.

〔3〕辜联昆，退缩椭圆型方程的边值问题，数学学报，27，1(1984)，69—81.

〔4〕沈尧天、郭信康，强奇系数拟线性抛物型方程的第一边值问题，数学年刊（A辑），4，5(1983)，625—632.

〔5〕Gilbarg D., Trudinger N. S., Elliptic partial differential equations of seconder, Springer-Verlag, (1977).

The Existence and Uniqueness of the Generalized Solutions for Non-uniformly Linear parabolic Equations

Liang Xuexin

Abstract

Galerkin's method was an important method used for proving the boundary value problems of the various types of partial differential equations. In this paper we use this method in non-uniformly linear parabolic equations to construct the approximate solutions of generalized solutions. It also proves the uniqueness of solutions. They are the extension of the results of uniformly linear parabolic equations.