

工艺设备调整数学模型

陈希达 陈宝珊

(精密机械工程系)

摘 要

文章在分析现有工艺设备调整数学模型的基础上,利用四十年代在数理推断中出现的序贯分析法,建立一种能最经济最有效地应用样件资料的模型,并借助电子计算机,解决工程上的实践问题,使得工艺设备调整最佳化。

一、工艺设备调整的数学模型化

各种各样的工艺设备都是靠调整各个工艺参数的条件来获得产品的最佳质量的。1924年美国工程师 W·Shewhart 首先提出工艺参数调整数学模型化的思想,以后随着生产力的不断发展,特别是经过第二次世界大战,生产产量越来越大,产品精度要求越来越高,如何利用数学方法分析误差产生原因,进行工艺设备调整,保证产品质量成了一个突出问题。1940年苏联包曼工学院教授 А.Б. Яхин 提出:利用样件的算术平均值遵循正态分布的原理,把工艺设备参数调整在样件区 MN,见图1,可保证零件加工尺寸的实际分散区落在公差带的内部。这种方法是目前工艺设备调整的依据,其实施是应用调整卡规,使容量为 m 的样件均值落在 MN 区域内,保证制造时不出废品 [1]。

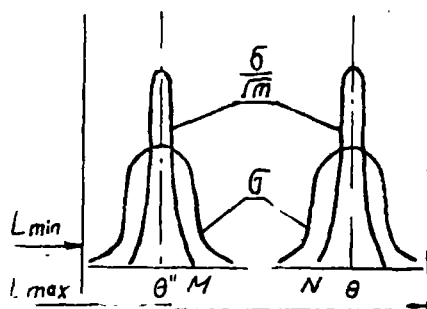


图1 工艺参数调整位置

二、工艺设备调整方法的评价

一个调整方法的好坏,首先要看样件容量的大小,其次要看被调整工艺参数控制的工件尺寸分散数学期望区域 $\theta' \theta''$ 的大小(图1)。显然,样件容量越大,调整区域 MN 越宽。

本文1985年3月23日收到。

由图1得:

$$MN = L_{max} - L_{min} - 6\sigma(1 + 1/\sqrt{m}) \quad (1)$$

$$\theta'\theta'' = L_{max} - L_{min} - 6\sigma \quad (2)$$

我们若用 I 表示 $\theta'\theta''$ 与 MN 之差值, 则

$$I = \theta'\theta'' - MN \quad (3)$$

表示调整方法的品质因素。I 越小表示尺寸分散数学期望的区间与调整卡规区间的差值越小, 从而调整方法越好。由式(1)至(3)可得:

$$I = \frac{6\sigma}{\sqrt{m}} \quad (4)$$

显然 I 随 m 及 σ 而变, m 越大, σ 越小, I 越小。只有当 m 非常大时 I 才接近于零, 也就是在样件容量十分大的情况下才能保证调整卡规所在的区间与尺寸分散数学期望区间相等。一般情况下, m 是不可能很大的。那样, 尺寸分散数学期望区间与调整卡规区间就会相差很大。

三、序贯分析法在工艺设备调整中的应用

1943年美国 A. Wald 提出应用序贯分析方法来判别统计总体的性质。这种方法应用到工艺设备调整中去可解决上述现行工艺设备调整所存在的问题。

如图2, 被控制尺寸数学期望 θ'' 取在 $L_{min} + 3\sigma$ 处, 而上限 θ' 由公差宽度及工艺设备随时间的稳定性来决定。有了 $\theta''\theta'$ 之后, 我们在 $\theta''\theta'$ 之左右确定一个小区间 $\theta_0''\theta_1''$ 及 $\theta_0'\theta_1'$ 。我们希望调整后 θ 落在 $[\theta_1'', \theta_0']$ 区间内, 即图2中的阴影部分。为了得到较有说服力的结果, 我们记 $H_0: \theta = \theta_1''$, $H_1: \theta = \theta_0''$ 。 H_0 表示总体均值为 θ_1'' (原假设), H_1 表示总体均值为 θ_0'' (备择假设)。

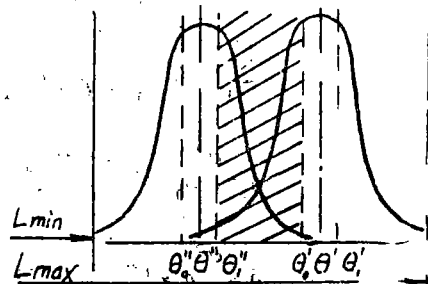


图2 公差范围的分布曲线位置

若样件 (X_1, X_2, \dots, X_m) 是来自 $H_0: \theta = \theta_1''$ 的正态总体, 考虑到其独立性, 联合分布密度函数应为:

$$P_{0m}'' = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (X_i - \theta_1'')^2} \quad (5)$$

同理若样件来自数学期望 $H_1: \theta = \theta_0''$ 的正态总体, 则其联合分布密度函数为:

$$P_{1m}'' = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (X_i - \theta_0'')^2} \quad (6)$$

我们预先选择两个常数 A 和 B ($B < A$), 在抽样过程的每一步, 例如第 m 步, 计算相应的概率 P_{1m}''/P_{0m}'' , 如果

$$B < \frac{P_{1m}''}{P_{0m}''} < A \quad (7)$$

则继续抽样, 如果

$$\frac{P_{1m''}}{P_{0m''}} \geq A \quad (8)$$

则停止抽样并否定 H_0 (接受 H_1), 如果

$$\frac{P_{1m''}}{P_{0m''}} \leq B \quad (9)$$

则停止抽样并可接受 H_0 .

在上述序贯判断准则下, 如果对于 H_0 成立时而又错误地否定 H_0 时的概率为 α (犯第一类错误的概率), 对于 H_1 成立时而又错误地认为 H_0 成立的概率为 β (犯第二类错误的概率). 根据文 [2], 如果

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (10)$$

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (11)$$

则由式(7)至(9)所决定的序贯概率比检验引起的误差是很小的.

这样, 由式(5)至(11)可得:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i &\geq \frac{\sigma^2}{\theta_1'' - \theta_0''} \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \frac{m}{2} (\theta_0'' + \theta_1'') \text{ 接受 } H_0; \theta = \theta_1'' \\ \sum_{i=1}^m x_i &\leq \frac{\sigma^2}{\theta_1'' - \theta_0''} \ln \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{m}{2} (\theta_0'' + \theta_1'') \text{ 接受 } H_1; \theta = \theta_0'' \\ \frac{\sigma^2}{\theta_1'' - \theta_0''} \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \frac{m}{2} (\theta_0'' + \theta_1'') &< \sum_{i=1}^m x_i < \\ \frac{\sigma^2}{\theta_1'' - \theta_0''} \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \frac{m}{2} (\theta_0'' + \theta_1'') &\text{ 续继续抽样} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

同样, 我们可以认为样件 (X_1, X_2, \dots, X_m) 来自数学期望为 θ_1' 或 θ_0' 的总体. 这时记 $H_0: \theta = \theta_0'$, $H_1: \theta = \theta_1'$. 如果 α 、 β 含义同上, 样件来自 $H_1: \theta = \theta_1'$ 的总体的联合分布密度函数为:

$$P_{1m'} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_1')^2} \quad (13)$$

样件来自 $H_0: \theta = \theta_0'$ 的总体的联合分布密度函数为:

$$P_{0m'} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0')^2} \quad (14)$$

我们把序贯判断准则(7)至(11)中的 $P_{0m''}$ 和 $P_{1m''}$ 用 $P_{0m'}$ 和 $P_{1m'}$ 取代并联立式(13)、(14), 有:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m x_i &\geq \frac{\sigma^2}{\theta_1' - \theta_0'} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{m}{2} (\theta_0' + \theta_1') \text{ 接受 } H_1; \theta = \theta_1' \\
 \sum_{i=1}^m x_i &\leq \frac{\sigma^2}{\theta_0' + \theta_1'} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{m}{2} (\theta_0' + \theta_1') \text{ 接受 } H_0; \theta = \theta_0' \\
 \frac{\sigma^2}{\theta_1' - \theta_0'} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{m}{2} (\theta_0' + \theta_1') &< \sum_{i=1}^m x_i < \\
 \frac{\sigma^2}{\theta_1' - \theta_0'} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{m}{2} (\theta_0' + \theta_1') &\text{ 继续抽样}
 \end{aligned} \quad (15)$$

由式(12)、(15)我们得:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m x_i &\geq \frac{\sigma^2}{\theta_1' - \theta_0'} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{m}{2} (\theta_0' + \theta_1') \text{ 或} \\
 \sum_{i=1}^m x_i &\leq \frac{\sigma^2}{\theta_1'' - \theta_0''} \ln \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{m}{2} (\theta_0'' + \theta_1'') \\
 &\text{绝拒: } \theta'' \leq \theta \leq \theta' \\
 \frac{\sigma^2}{\theta_1'' - \theta_0''} \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \frac{m}{2} (\theta_0'' + \theta_1'') &\leq \sum_{i=1}^m x_i \leq \\
 \frac{\sigma^2}{\theta_1' - \theta_0'} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{m}{2} (\theta_0' + \theta_1') \\
 &\text{接受: } \theta'' \leq \theta \leq \theta' \\
 \sum_{i=1}^m x_i &\text{落在其它区间, 继续抽样}
 \end{aligned} \quad (16)$$

显然, 式(16)就是我们要建立的工艺设备调整理论模型。在工程上, 我们可以认为 α 、 β 各等于某一小数, $\theta_1' - \theta_0' = \theta_1'' - \theta_0'' = c$ 由调整工艺决定。

由式(16)我们作出图3(图中为 $\alpha = \beta$ 的情况)。

$$\begin{aligned}
 \text{I: } \sum_{i=1}^m x_i &= \frac{\sigma^2}{c} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\theta_0' + \theta_1'}{2} \\
 \text{II: } \sum_{i=1}^m x_i &= \frac{\sigma^2}{c} \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + m \frac{\theta_0'' + \theta_1''}{2} \\
 \text{III: } \sum_{i=1}^m x_i &= \frac{\sigma^2}{c} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\theta_0'' + \theta_1''}{2} \\
 \text{IV: } \sum_{i=1}^m x_i &= \frac{\sigma^2}{c} \ln \frac{\alpha}{1-\beta} + m \frac{\theta_0' + \theta_1'}{2}
 \end{aligned}$$

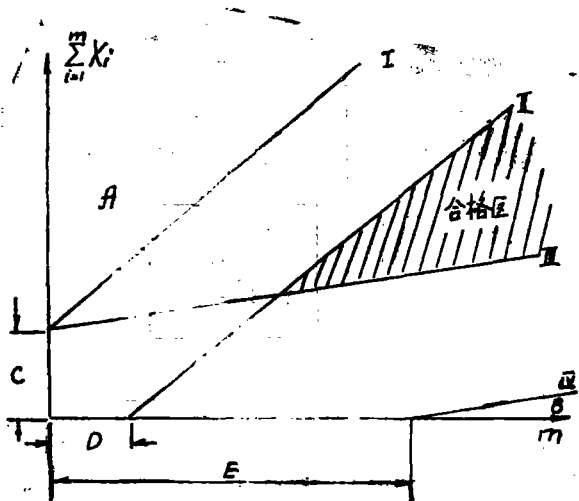


图3 模型(16)决定的抽样区、合格区和再调区

A, B: 不合格区, 再调区;

$$C = \frac{\sigma^2}{c} \ln \frac{1-\beta}{\alpha};$$

$$D = \frac{\sigma^2}{\theta'c} \ln \frac{1-\alpha}{\beta},$$

$$E = \frac{\sigma^2}{\theta''c} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$$

从图3不难看出,当样件信息的叠加和落在合格区内时,我们可停止抽样并认为工艺设备已调整好,当叠加和落在不合格区内时,我们要重新调整,叠加和落在合格区和不合格区以外的区域我们继续抽样。

在生产实践中,我们可以通过把原始信息和不断采样得到的样件信息输入计算机,自动判别工艺设备是否调整好。下面绘出程序框图(图4),其程序用FORTRAN—IV—PLUS语言编写,见附录1。

在特殊情况下,当加工公差与工艺设备加工尺寸分散均方差的6倍相接近时,如图5,我们用序贯分析方法来测定下列不等式:

$$|\theta - \theta_0| \leq \delta' \quad (17)$$

式(17)可表示为:

$$0 \leq \left| \frac{\theta - \theta_0}{\sigma} \right| \leq \delta \quad (18)$$

满足式(18)的一切调整都可以认为是合格的,相反若 $|\theta - \theta_0| / \sigma > \delta$ 则认为调整是不合格的。

若有一组容量为 m 的样件 (x_1, x_2, \dots, x_m) 是来自 $\theta = \theta_0$ 的总体,则其联合分布密度函数为:

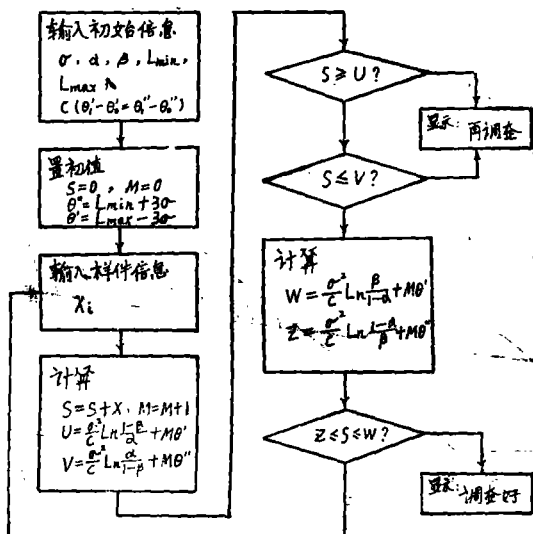


图4 模型(16)程序框图

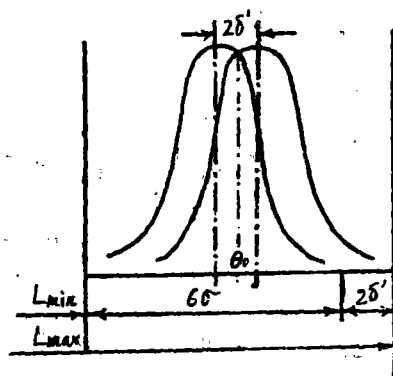


图5 加工公差与分布曲线的位置关系

$$P_{0m} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0)^2} \quad (19)$$

若样本来自 $\theta = \theta_0 - \delta\sigma$ 或 $\theta = \theta_0 + \delta\sigma$ 的总体, 则分布密度函数的平均值为,

$$P_{1m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0 + \delta\sigma)^2} + \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0 - \delta\sigma)^2} \right) \quad (20)$$

我们记 $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_0 - \delta\sigma$ 或 $\theta = \theta_0 + \delta\sigma$, 如果 α 、 β 分别为犯第一类错误和第二类错误的概率, 则依序贯概率比检验法则 (如前述) 联立式 (19)、(20) 化简得,

$$\left. \begin{aligned} \ln h \left[\frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right] &\geq \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \text{ 接受 } H_0: \theta = \theta_0 \\ \ln h \left[\frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right] &\geq \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \text{ 接受 } H_1: \left| \frac{\theta - \theta_0}{\sigma} \right| = \delta \\ \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} &< \ln h \left[\frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right] < \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \text{ 继续抽样} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由模型 (21), 我们容易验证当 $\left| \frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| > 3$ 时, 存在下列近似等式:

$$\ln h \left[\frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right] \approx \left| \frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| - \ln 2 \quad (22)$$

把式 (22) 代入式 (21) 化简得,

$$\left. \begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| &\leq \frac{\sigma}{\delta} \left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \ln 2 \right) + m \frac{\delta\sigma}{2} \text{ 接受 } H_0: \theta = \theta_0 \\ \left| \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| &\geq \frac{\sigma}{\delta} \left(\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \ln 2 \right) + m \frac{\delta\sigma}{2} \text{ 接受 } H_1: \left| \frac{\theta - \theta_0}{\sigma} \right| = \delta \\ \frac{\sigma}{\delta} \left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \ln 2 \right) + \frac{m}{2} \delta\sigma &< \left| \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| < \frac{\sigma}{\delta} \left(\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \ln 2 \right) + \frac{m}{2} \delta\sigma \text{ 继续抽样} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

如果 $\left| \frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| \leq 3$, 我们可根据如下化简建立相应的表格。

设 $\ln h|u| = u$, 当 $v \geq 0$ 时, u 存在一个正解:

$$|u| = \phi(v) = \ln(e^v + \sqrt{e^{2v} - 1}) \quad (24)$$

由式 (24) 作出 “ $\phi(v) - v$ ” 表格如附表。

根据式 (24), 模型 (21) 化为:

$$\left. \begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| &\leq \frac{\sigma}{\delta} \phi \left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\beta^2}{2} \right) \text{ 接受 } H_0: \theta = \theta_0 \\ \left| \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| &\geq \frac{\sigma}{\delta} \phi \left(\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \right) \text{ 接受 } H_1: \left| \frac{\theta - \theta_0}{\sigma} \right| = \delta \\ \frac{\sigma}{\delta} \phi \left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \right) &< \left| \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right| < \frac{\sigma}{\delta} \phi \left(\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \right) \text{ 继续抽样} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

由模型(23)或模型(25)及附表我们可以很方便地决定工艺设备是否调整好。

不过,上述判别工艺设备是否调整好的计算工作量较大。实际上,在当今计算机应用日益广泛的情况下,我们可以直接通过模型(21)用电算方法判别工艺设备是否调整好。下面绘出其框图(图6),程序用FORTRAN—IV—PLUS语言编写,见附录2。

四、结 语

1、文中提出的模型在工艺设备调整中可最有效地应样件资料。用文中论述的方法通过一般的通用量具测量工件尺寸而判断调整是否合格比起A.Б. Яхин用卡规的方法要优越得多。

2、随着微型计算机的广泛应用,利用微机处理工艺设备调整模型,方便迅速。文章给出了电算框图,其附录中的程序可直接使用。

3、目前世界工业发达国家发展很快的柔性制造系统(FMS)必将在我国逐步推广,本文提出的模型若用于实时质量管理也必产生很大的影响。

4、文章仅论述正态分布常值系统性误差的工艺设备调整,其它分布后文详论。

参 考 文 献

- [1] A.Б. Яхин, Технология точного приборостроения, оборониз, (1940).
- [2] A. Wald, Sequential Analysis, John Wiley, Newyork, (1947).
- [3] 日本工业标准 JIS 9009, (1962).
- [4] SRGSection, Sequential Analysis When the Result of a Single Observation is a Classification as Good or Bad and When the Result of the Test is Acceptance or Rejection, 2 (1945).
- [5] 马逢时等, 应用概率统计, (1984).

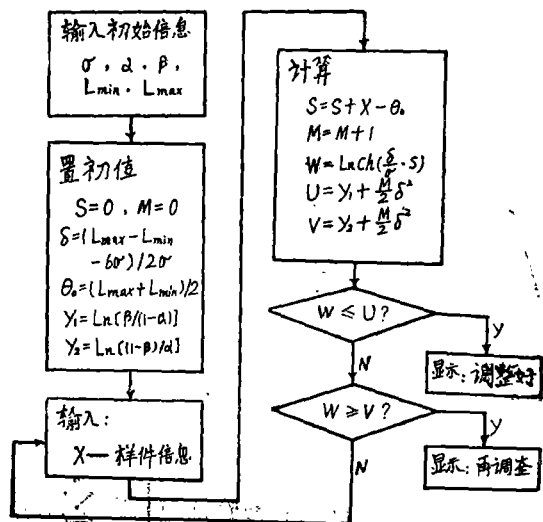


图6 模型(21)程序框图

附 表

$$\phi(V) = Ln(e^v + \sqrt{e^{2v} - 1}) \quad (V \geq 0)$$

V	$\phi(V)$	V	$\phi(V)$	V	$\phi(V)$	V	$\phi(V)$
0.00	0.0000	0.15	0.5615	0.30	0.8138	0.45	1.0212
0.01	0.1417	0.16	0.5809	0.31	0.8286	0.46	1.0341
0.02	0.2007	0.17	0.5997	0.32	0.8433	0.47	1.0470
0.03	0.2462	0.18	0.6182	0.33	0.8577	0.48	1.0597
0.04	0.2847	0.19	0.6361	0.34	0.8720	0.49	1.0724
0.05	0.3189	0.20	0.6537	0.35	0.8862	0.50	1.0850
0.06	0.3500	0.21	0.6709	0.36	0.9002	0.60	1.2076
0.07	0.3785	0.22	0.6879	0.37	0.9143	0.70	1.3249
0.08	0.4050	0.23	0.7045	0.38	0.9279	0.80	1.4384
0.09	0.4307	0.24	0.7208	0.39	0.9415	0.90	1.5490
0.10	0.4547	0.25	0.7369	0.40	0.9551	1.00	1.6575
0.11	0.4777	0.26	0.7508	0.41	0.9685	1.50	2.1805
0.12	0.4998	0.27	0.7686	0.42	0.9818	2.00	2.6885
0.13	0.5210	0.28	0.7823	0.43	0.9950	2.50	3.1915
0.14	0.5416	0.29	0.7964	0.44	1.0081	3.00	3.9926

附录1 模型(16)电算程序

```

READ(5, 10) DX, C, A1, A2, CA, CI
10 FORMAT(6F7.4)
P1 = CA + 3 * DX
P2 = CI - 3 * DX
S = 0
M = 0
T = DX * 2.0 / C
15 READ(5, 20) X
20 FORMAT(F7.4)
S = S + X
M = M + 1
U = T * ALOG((1 - A2 / A1) + M * P2
V = T * ALOG(A1 / (1 - A2)) + M * P1
IF(S.GE.U.OR.S.LE.V) GOTO 25
W = T * ALOG(A2 / (1 - A1)) + M * P2
Z = T * ALOG((1 - A1) / A2) + M * P1
IF(S.LE.W.AND.S.GE.Z) GOTO 35
WRITE(5, 11)
11 FORMAT(5X, 'CONTINUE SAMPLING1 ')

```



```

      GOTO15
25  WRITE(5, 30)
30  FORMAT(5X, 'PLEASE READJUST! ')
      GOTO 100
35  WRITE(5, 40)
40  FORMAT(5X, 'ADJUST VERY WELL! ')
100 STOP
      END

```

附录2 模型(21)电算程序

```

      READ(5, 10)DX, A1, A2, CA, CI
10  FORMAT(5F7.4)
      S = 0
      M = 0
      B = (CI - CA - 6 * DX) / (2 * DX)
      XO = (CA + CI) / 2
      Y1 = ALOG(A2 / (1 - A1))
      Y2 = ALOG((1 - A2) / A1)
15  READ(5, 20)X
20  FORMAT(F7.4)
      S = X - XO + S
      M = M + 1
      W = ALOG(COSH(B * DX * S))
      U = Y1 + M * B * X * 2 / 2
      V = Y2 + M * B * X * 2 / 2
      IF(W .LE. U)GOTO25
      IF(W .GE. V)GOTO35
      WRITE(5, 11)
11  FORMAT(5X, 'CONTINUE SAMPLING! ')
      GOTO15
25  WRITE(5, 30)
30  FORMAT(5X, 'ADJUST VERY WELL! ')
      GOTO100
35  WRITE(5, 40)
40  FORMAT(5X, 'PLEASE READJUST! ')
100 STOP
      END

```

程序主要变量名含义:

DX: σ , C: $\theta_1 - \theta_0'$, A1: α , A2: β , CA: L_{min} , CI: L_{max} , P1: θ_1 , P2: θ' , B: δ ,

The Mathematical Model of the Adjustment of Technological Installations

Chen Xida Chen Baoshan

Abstract

The method proposed by А.Б.ЯХИН is defective in that a sample size must increase as decrease the value of the separated mathematical expectation interval of finish sizes minus a adjustment interval. On the basis of the principles of Sequential Analysis, this paper presents a mathematical model, for the adjustment of technological installations, being able to use sample values effectively, that is,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i &\geq \frac{\sigma^2}{\theta_1' - \theta_0'} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{m}{2} (\theta_0' + \theta_1') \\ \sum_{i=1}^m x_i &\leq \frac{\sigma^2}{\theta_1'' - \theta_0''} \ln \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{m}{2} (\theta_0'' + \theta_1'') \end{aligned} \right\} : \text{Reject: } \theta'' \leq \theta \leq \theta'$$

$$\frac{\sigma^2}{\theta_1'' - \theta_0''} \ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \frac{m}{2} (\theta_0'' + \theta_1'') \leq \sum_{i=1}^m x_i \leq \frac{\sigma^2}{\theta_1' - \theta_0'} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{m}{2} (\theta_0' + \theta_1') : \text{Accept } \theta'' \leq \theta \leq \theta'$$

$\sum_{i=1}^m x_i$ belongs to other intervals, continue sampling.

A simplified model adaptable to engineering application is also given as follow

$$\ln ch \left[-\frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right] \leq \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \quad \text{Accept: } \theta = \theta_0$$

$$\ln ch \left[\frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right] \geq \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \quad \text{Reject: } \theta = \theta_0$$

$$\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} < \ln ch \left[\frac{\delta}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_0) \right] < \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\delta^2}{2} \quad \text{continue sampling}$$

The computer programs coping with two models are available at the end of this article.