

发展中的经济数学

蔡又中 吴道明 曾文平

(应用数学系)

摘 要

本文简单地介绍了经济学中的数学方法,回顾了它的历史,並展望了的广阔的前景。

在经济学中系统地引进数学方法是从十九世纪开始。经过一百多年的努力,特别是近半个多世纪以来,由于现代经济的发展及电子计算机的使用和发展,经济与管理的定量技术有了飞跃的进步,它已发展到超过模拟物理和工程的时代,取得了许多重要成果,並形成了现代经济学中与数学紧密相关的一些分支:计量经济学、数理经济学与经济控制论等。

马克思指出:一种科学只有当它成功地利用数学的时候,才能达到完善的地步。现在,数学已广泛地流行于经济学当中,可以预期在未来经济发展中,数学方法将起着更加显著的作用。诺贝尔奖金虽没有设数学奖,但在1969年至1983年十二位诺贝尔经济学奖获得者中就有七位是数学家。一向被认为最理论性的拓扑学也运用于经济理论。数学科学之所以能如此广泛地深入经济学与管理学並非偶然。事实上,经济学家的重要任务之一就是在稀缺资源的不同用途之间进行选择,以期实现资源的最有效利用,即最少浪费。这本身就是一个数学的极值问题。对社会主义政治经济学问题尤为突出,经济学家孙冶方明确指出:“用最少的劳动消耗取得最大的有用效果,是社会主义政治经济学的红线”。这些典型的最优化问题,对经济学和管理学的影响是巨大的。事实证明,经济学是数学方法大有用之地,由于许多规律还没有搞清,经济学家急需从数学中寻找工具;由于和物理世界有许多不同的特点,需要数学家深入地挖掘並创造出更能适合经济现象的新的数学方法。可以毫不夸张地说,数学的每一分支对经济学都有重要应用。在这篇短文里,我们不能包罗万象地涉及所有的问题与方法,而只能举几方面说明数学方法在经济与管理的应用和发展。

一. 边际分析方法是经济学中的重要分析方法。所谓边际就是导数,实质是变化率。例如:边际成本就是总成本函数 $C(Q)$ 对产品 Q 的变化率 $\frac{dc}{dQ}$ 。利用边际概念讨论厂商理论模型是微观经济学的一个重要内容,即厂商如何控制一定产量,使利润最大。这时,起作用的往往是边际成本,以边际概念为基础的决策分析称为边际分析方法。

在经济学研究中,最早引入边际分析方法是十九世纪七十年代奥地利学派,此后迅速流

本文1984年10月20日收到。

行于西方经济学, 並逐渐形成了所谓“数理学派”。应该指出, 奥地利学派提出“边际效用价值论”的目的是对抗马克思的劳动价值论, 是反科学的。但是, 他们研究中使用的边际分析方法是一个有力的工具, 不应把它和边际效用价值论同等起来。事实上, 边际概念将导数概念引入经济学, 使经济学研究的对象从常量进入变量, 所用的方法从初等数学进入高等数学, 无疑是有重要意义的。在社会主义社会, 商品和货币仍然存在, 价格规律还在起作用。所以, 利用边际分析方法研究如何确定生产规模以获得最大效益等诸如此类问题, 对于国家企业提高经营管理水平, 是有参考价值的。

在经济学中应用边际概念, 引进弹性概念, 是对数学中导数应用的有力发展。所谓弹性, 就是相对变化率。弹性概念在经济学有重要应用。如果把某种商品的需求量 Q 看成商品价格 P 的函数 $Q = f(p)$, $f(p)$ 称为需求函数, 则 $\frac{EQ}{Ep} = \frac{d \text{Log} f(p)}{d \text{Log} p}$ 称为需求的价格弹性。它是衡量需求的相对变动对价格变动的反映程度。类似地讨论供给的价格弹性等。

价格弹性为价格理论的研究提供了一种定量分析手段, 使我们能够比较精确地从数量上研究供求对价格的依存关系。在管理中, 可以作为国家或企业调整商品价格、平衡市场供求预测价格调整后效益得失的依据有重要的参考价值。但是, 长期以来, 我国经济界对这方面的研究较少, 甚至把它简单地斥之为资产阶级的庸俗经济学。实际上, 据考, 几乎和 Marshall 同时甚至稍早些, 马克思就谈到价格弹性问题。

二. 线性规划是数学与经济学、管理科学结合的产物。由于在这个领域开创性的工作, 著名的苏联数学家 A. B. Канторович 和另一位美国经济学家一起获得 1975 年的诺贝尔经济学奖金。

线性规划是管理科学最成熟和最有用的分支之一。由所探讨的问题的性质决定的一系列的约束条件, 如何把有限资源在许多竞争活动之间进行最优分配, 这就是线性规划所要解决的问题。单纯形方法 (Sempix Method) 用来求解一般线性规划问题, 在计算上具有极高的效率, 再加上使用高速计算机, 于是线性规划就成为当前最强有力的优化方法。而数学本身如著名的切比雪夫——逼近论的精髓问题, 直至 1959 年之前尚无一较好的解决办法。而现在也可以化为线性规划问题用单纯形法求解。

单纯形法也许是二十世纪所发明的最重要的计算方法, 通过解决大量的工业问题表明, 单纯形法非常简捷, 对于一个 n 个未知数 m 个方程的问题, 其计算次数似乎与 n 成正比。单纯形法的运算速度为什么这么快呢? 谁也不知道, 而这就是数值分析中最大悬而未解的问题之一, 苏联数学家哈奇扬用十分不同的分析算法解此问题。哈奇扬证明, 他的算法有以常数 k 为边界条件的计算次数, 次数 n^b 比 2^n 小。哈奇扬的证明是计算科学的一大理论成果。但他的算法的形式在目前没有多大实用价值。

现在线性规划尚有待解决的两大难题是:

1. 证明单纯形法为什么在实践应用中总是很好的。
2. 证明哈奇扬法如何才能在实际应用中比单纯形法好。

线性规划在经济企业中应用最广泛, 这里略而不谈。仅想就其对偶原理所导出的影子价格概念在经济上重要应用作一点说明。

一般线性规划问题写为 (矩阵形式):

原规划问题

$$(I) \begin{cases} \max \pi = CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

对偶规划问题

$$(II) \begin{cases} \min \pi^* = Yb \\ YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

把 x_1, x_2, \dots, x_n 理解为一个经济实体(国家、地区、企业等)所生产的 n 种产品; C_i 为第 i 种产品的单位效益(利润、产值或其他), $\pi = CX$ 为总效益, b_i 为该实体拥有第 i 种资源总量, a_{ij} 为生产一个单位第 i 种产品需要第 j 种资源的数量。我们能证明,在最优解的情况下, $\pi^* = Yb$,但 $\pi = \pi^*$,于是 $\pi = Yb$ 。对 b_i 微分 π ,得 $\frac{\partial \pi}{\partial b_i} = Y_i$ 。这表明,从边际分析的角度看,如果我们着眼于增加经济实体的总效益,则是否开发第 i 种资源取决于 $\frac{\partial \pi}{\partial b_i}$ 的大小。

所以 $\frac{\partial \pi}{\partial b_i}$ 反映了资源的某种“价值”。这种价值与提高总效益这一目的直接联系在一起。西方经济学家把它作为影子价格(Shadow Price),苏联把它叫做最优计划价格。对偶问题有非常重要的经济解释, Y_i 表示讨论中各种资源的影子价格。

影子价格应用于评价资源的重要性已广泛为西方和苏联所接受。国内重视影子价格这个概念及其应用,不过是近三、四年的事,由于历史上的原因,我国现行的价格体系不十分合理,既不能准确地反映生产费用,也不能如实反映供求关系,据此很难评价经济效益。世界银行1981年对我国考察报告中,反复提到影子价格,建议我国充分利用这一工具,评价经济效益,协调和制定计划是值得重视的。

值得提到的是,传统的条件极值问题的Lagrange乘数法在经济学中找到解释,即要求函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在约束条件 $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_k (k=1, 2, \dots, m)$ 下的极大(或极小)值,引进Lagrange函数。

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^m \lambda_k [\varphi_k(x_1, \dots, x_n) - C_k] \text{ 将 } f \text{ 的极值看成第}$$

k 个约束条件右端 C_k 的函数,Lagrange乘数 λ_k 具有 $\frac{\partial f}{\partial C_k}$ 。经济学家发现, λ_k 正是某种资源的影子价格。这可算是经济学对数学的一个贡献。

三. 计量经济学可理解为经济学、统计学和数学的结合,按照流行的看法,除了投入产出分析外,它的内容还应包括需求分析、供给分析以及宏观经济系统的模型等。

经济学研究的一个很大困难是不能搞实验,而计量经济学模型的建立,对解决这个问题迈出了第一步。计量经济学模型可用于如下几个方面:

1. 预测,这是计量经济模型最常见的应用。

2. 场景分析(Scenario Analysis),它不是预测,而属于“如果这样,将会怎样”等并不一定会发生的问题。如中东石油生产少一半,对美国及其他国家有什么影响?就属于此类问题。

3. 政策制定或政策模拟,即利用模型来模拟每一种政策的后果。这实际上就是试验,经济学家头痛的事是不能做试验,有了模型就可以模拟试验。这是最广泛也是最重要的应用。

值得注意的是,这方面的研究很自然地和最优化理论结合起来,而形成了近十几年发展起来的经济控制论。

1939年,荷兰的J. Tinbergen(首届诺贝尔经济学奖金获得者之一)编制的第一个宏观计量经济模型只有50个方程、64个变量,而现在1000—5000个方程也称为“简单”的。我国第一个宏观计量经济模型是1979年由国家计委编制的有103个方程。

四、经济控制论是经济学家运用工程控制方法去研究如何进行最优控制,即如何寻找最佳政策,这自然是很有意义的问题。最早发现经济模型与工程系统之间相似之处,从而把在分析工程系统时被证明是成功的某些方法应用经济模型的研究,一是A. Tustin,他是一位关心经济问题的工程师,一是A. W. Phillip,他是一位有工程经验的经济学家。他们把工程控制论的做法直接移植过来,用框图描述经济模型,引进了系统、输入、输出、耦合、反馈等概念。例如,可以证明Kaynes乘数就是反馈乘数的特例,说明了工程控制方法与Kaynes经济理论有惊人相似之处,工程现象与经济现象类似。

五、数理经济学是以数学为工具研究经济理论问题,它着重研究如何用数学描述经济现象,它的主要兴趣是在理论方面而不考虑经验资料,目的是在一定的假设条件下,运用数学方法来描述、研究和论证经济现象及相互依存关系,并推导出一些理论结果。1874年, Walras提出著名的经济平衡模型,奠定了数理经济学的基础。Walras把经济学中一般均衡问题描述为一个联立方程组的解,在当时是一个很大的进步。但他认为只要方程个数等于变量个数方程就有解,这自然是错误的。此后直到本世纪三十年代,都没能解决Walras平衡模型解的存在问题。

1944年, Von Neumann总结前人在经济学研究中应用数学方法的实践,明确提出应该深入地发掘更能适合于经济现象的新的数学方法,应该从分析最简单的经济形态,例如偏好、效用、平衡、竞争、协作等等开始,从中提炼出数学模型,然后从对模型深入研究中得到严谨的结论。并在《博弈论和经济行为》中对上述经济学的一些基本概念第一次给予严格公理化定义,有力地推动了数理经济学向现代化的数学方面发展。Von Neumann的影响所及,形成了Princeto学派,特别既是经济学家又是杰出数学家G. Debrán的《Theory of Value》(1959年)和Arrow-Debrán的平衡模型,完成了数理经济学现代化的准备工作,彻底地解决了Walras平衡理论的基本问题。1983年,62岁的G. Debrén由于“把新的分析方法运用于经济理论”,而获得当年度的诺贝尔经济学奖金。

在考虑由 n 种商品构成的市场模型, $x_i(t)$ 表示第 i 种商品在时刻 t 的价格,在某些简化假设条件下,可以推出 $x_i(t)$ 满足常微分方程组,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

经济学家希望回答下列三个问题,

1. 是否存在各个商品的均衡价格 p_i ,使整个市场处于稳恒状态?
2. 如果稍微变动某商品的价格,整个市场会不会出现很大的动荡?
3. 当时间很长以后,即 $t \rightarrow \infty$ 时,会出现什么情况?

所有上述问题也是数学家关心的问题,它构成了所谓微分方程定性理论的主要内容。而利用古典分析讨论一般均衡问题的缺陷是明显的,假如关于线性化假设以及函数解析性要求

从经济学角度看,确实有些造作。本世纪三十年代开始,近代分析方法的引入,从根本上改变了这种情况。Von Neumann 等人创造性地应用拓扑中著名的 Brouwer 不动点定理研究一般均衡理论,彻底解决了 Walras 平衡解的存在性问题,引起了广泛的兴趣。但是,经济学家不满足于仅仅知道平衡解的存在性,还需要了解这个解是什么。然而,长期以来,关于拓扑量的数值方法很少人研究。1967 年 H. E. Scarf 提出了计算 Brouwer 不动点的一个算法。在这个基础上, H. W. Kuhn 利用非线性规划提出了更有效的算法。现在,不动点计算方法已经成为拓扑学中的“热门课题”。历史上,这个课题的产生和发展很大程度上是受经济问题的刺激。当前,经济问题仍然是它的重要推动因素。

今天的数理经济学,方法新,思路宽,很值得重视。如何将现代化数理经济学的成果应用于社会主义经济研究。例如考虑以“计划经济为主,市场调节为辅”的数学模式应该是什么样的,无疑是很重要的课题。

六. 把模糊集论方法应用于经济研究颇引人注目。例如,把模糊优化方法用于经济平衡的研究,甚至可以把模糊集思想引入 Walras 模型,如果能得出类似于 Brouwer 不动点定理的模糊不动点原理,并以此为工具讨论“基本平衡”或“模糊平衡”解的存在性。据介绍,国内有些学者在作这一工作,并取得一些成果。

纵观上述几个方面,足以看到经济事业的蓬勃兴起为数学的发展提供了广阔的前景,祖国四化建设的宏伟蓝图,正是数学工作者大有可为的广阔天地,让我们为振兴中华而努力工作吧!

参 考 文 献

- [1] Franklin, J, Mathematical method of economics, The American Mathematical Monthly, 90, 4 (1983).
- [2] 陈锡康等, 经济数学方法与模型, 中国财政经济出版社, (1982).

Developing Mathematics in Economics

Cai Youzhong Wu daoming Zeng Wengping

Abstract

In this paper, We briefly introduce the mathematical methods in economics, look back to its history and look forward to its broad prospect.