第6卷 第3期 华侨大学学报 Vol.6 No.3
1985年8月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY Aug. 1985

劈m次因子法的一个注记

蔡火萤 谢立志

（应用数学系）

摘 要

本文给出一个实系数多项式求根的计算实例，它不能用劈一次因子法和劈二次因子法求解，而可以用劈三次因子法求解，并且从理论上分析产生这种现象的原因，用以说明劈m次因子法的实际意义。

一、引言及主要结果

求实系数多项式的根的劈 m 次因子法[1]，从理论上证明了劈任意次因子的可能性，事实上，它在实际算法中也有着重要的意义。由于用劈一次因子法可以求出实系数多项式的一个实单根，用劈二次因子法可以求出实系数多项式的一对共轭复根，是否可以认为用劈一次因子法和劈二次因子法就可以完全解决了全体根都是单根的实系数多项式的求根问题呢？其实不然。本文提供一个计算实例，即提供一个实系数多项式。它无法用劈一次因子法和劈二次因子法求根，却可以用劈三次因子法求根，并且从理论上分析产生这种现象的原因。

二、方法的叙述

1. 对于所给实系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+an$$

$$a_o=1$$

适当取出它的一个 m 次因子

$$x^m+\bar{p}^{(1)}x^{m-1}+\cdots+\bar{p}^{(m)}$$

的系数的初始近似值

$$p_o^{(1)}、p_o^{(2)}、\cdots、p_o^{(m)}$$

以及允许精度 $\epsilon>0$。

2. 假设已经求出这个 m 次因子的系数的第 k 次近似值

$$p_k^{(1)}、p_k^{(2)}、\cdots、p_k^{(m)}\qquad(k\geqslant0)$$

本文1985年2月16日收到。

则计算 $b_i = a_i - b_{i-1}p_k^{(1)} - b_{i-2}p_k^{(2)} - \cdots - b_{i-m}p_k^{(m)} \quad i=0、1、2、\cdots、n$

其中

$$b_{-1} = b_{-2} = \cdots = b_{-m} = 0$$

计算

$$R_i = b_{n-m+i} + \sum_{j=1}^{i-1} b_{n-m+i-j}p_k^{(j)}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

计算

$$c_i = b_i - c_{i-1}p_k^{(1)} - c_{i-2}p_k^{(2)} - \cdots - c_{i-m}p_k^{(m)}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-m$$

其中 $c_{-1} = c_{-2} = \cdots = c_{-m} = 0$

计算 $s_i = c_{n-2m+i} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{n-2m+i-j}p_k^{(j)} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$

并规定

$$s_{m+l} = 0,\ l \geqslant 1;\ p_k^{(m+l)} = 0,\ l \geqslant 1$$

计算

$$A1[i] = si$$

$$A_{j+1}[i] = A_j[i+1] - Aj[1]p_k^{(i)}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1.$$

计算

$$\frac{\partial R_i}{\partial p_k^{(j)}} = -A_{m-j+1}[i]$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

用适当的方法(例如主元法)求解线性代数方程组

$$\frac{\partial Ri}{\partial p_k^{(1)}}\triangle p_k^{(1)} + \cdots + \frac{\partial Ri}{\partial p_k^{(m)}}\triangle p_k^{(m)} = -Ri$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

计算

$$p_{k+1}^{(i)} = p_k^{(i)} + \triangle p_k^{(i)}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

3. 检查精度:

若 $|\triangle p_k^{(i)}| \leqslant \in$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

则用 $p_{k+1}^{(i)};\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$

作为满足精度要求的近似值，否则用 $k+1$ 代替 k 并转去执行2。

三、计 算 实 例

对于所给的实际数六次多项式

$$f(x) = x^6 - 27x^5 + 267x^4 + 1161x^3 + 2136.00001x^2 - 1728.00001x$$

$$+512.000002 \quad (1)$$

它的六个根相对密集于1附近和8附近．其中有三个单根密集于1附近，三个单根密集于8附近．今用劈一次因子法求多项式(1)的根，采用相当精细的一次近似因子

$$x-1.000000001$$

作为初始近似因子，进行迭代，计算机屏幕上显示出 DIVISION BY ZERO ERROR 而溢出停机，迭代中断，对于同一多项式(1)，又采用劈二次因子法求其根，仍然采用相当精细的二次近似因子

$$x^2-2x+1$$

作为初始近似因子，进行迭代，计算机屏幕上又显示出DIVISION BY ZERO ERROR 重新出现溢出停机，迭代中断，对于同一多项式(1)，再采用劈三次因子法求其根，仍然采用较为精细的三次近似因子

$$x^3-3.00000011x^2+3.00000011x$$
$$-1.0000001$$

作为初始近似因子，进行迭代，迭代三次便满足精度要求（我们取$\varepsilon=10^{-4}$），并把一个实系数六次多项式劈成为两个三次多项式，再用求根公式计算出各个三次多项式的根，结果求出这个实系数六次多项式的六个近似根如下：

$$x_1=1.00612005$$
$$x_2=0.996940053+5.29110816\times10^{-3}\,\mathrm{I}$$
$$x_3=0.996940053-5.29110816\times10^{-3}\,\mathrm{I}$$
$$x_4=7.98937862$$
$$x_5=8.00531067+9.16690266\times10^{-3}\,\mathrm{I}$$
$$x_6=8.00531067-9.16690266\times10^{-3}\,\mathrm{I}$$

如果取精确到小数点以下两位作为这个实系数六次多项式的近似根，便是

$$x_1=1.00 \qquad x_2=0.99$$
$$x_3=0.99 \qquad x_4=7.98$$
$$x_5=8.00 \qquad x_6=8.00$$

前三个根密集于1附近，后三个根密集于8附近．

四、结 论 分 析

从劈m次子的收敛性定理[1]知，如果多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$
$$a_0=1$$

的m次因子

$$x^m+\bar{p}^{(1)}x^{m-1}+\cdots-\bar{p}^{(m)}$$

的m个根

$$x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_m^*$$

都是多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$a_0=1$$

的单根，则劈m次因子法收敛，并且具有二阶敛速，这时

$$Q(x_i^*)\neq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

其中$Q(x)$满足如下关系

$$f(x)=Q(x)[x^m+\bar{p}^{(1)}x^{m-1}+\cdots+\bar{p}^{(m)}]$$

从理论上讲，只要

$$x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_m^*$$

是多项式$f(x)$的单根，就可以保证

$$Q(x_i^*)\neq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

但是如果从计算的观点来看，还要细分两种情况，当多项式$f(x)$的单根分布比较稀疏时，那么

$$Q(x_i^*),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

不仅非零，同时也保证不会变成机器零。当多项式$f(x)$的单根分布，其中有若干个较为密集，并且这些密集根一部份在m次因子

$$x^m+\bar{p}^{(1)}x^{m-1}+\cdots+\bar{p}^{(m)}$$

的根当中，另一部份在$n—m$次因子$Q(x)$的根当中，那么

$$Q(x_i^*),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

便有可能出现机器零（其中某些个），在我们的计算实例中，x_1，x_2，x_3这三个根密集于1附近，因此采用劈一次因子法和采用劈二次因子法都使

$$Q(x_i^*),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

的某些个变成为机器零，只有采用劈三次因子法才避免了这种现产生，因此我们得出以下结论：

如果实系数多项式$f(x)$的全体单根，分布较为稀疏，采用劈因子法求根时，可以一个一个地劈，也可以成批地劈，如果实系数多项式$f(x)$的全体单根中某些个单根分布较为密集，则这些密集根要成批劈下来，例如多项式有一个实单根远离于其他根，则可以用劈一次因子法求解之，如果多项式有一对共轭复根远离于其他根，则可以用劈二次因子法求解之，在我们的算例中，则需用劈三次因子法求解之等等。

五、程　　序

```
10  REM MAIN PROGRAM
20  DIM A(6), P(6), B(6), H(6, 6), D(6, 6), C(6), R(6), S(6), EE(6)
30  FOR I=1 TO 6
40  INPUT X(I)
50  NEXT I
55  GOSUB 6000
```

```
56  INPUT N
57  K=1
60  FOR I=1 TO 6
70  INPUT P(I)
80  NEXT I
90  B(O)-1.0
100 FOR I=1 TO 6
110 E=0.0
120 FOR J=1 TO I
130 E=E+B(I-J)*P(J)
140 NEXT J
150 B(I)=A(I)-E
160  NEXT I
170  R(1)=B(4)
180  R(2)=B(5)+B(4)*P(1)
190  R(3)=B(6)+B(5)*P(1)+B(4)*P(2)
200  C(0)=B(0)
210  C(1)=B(1)-C(0)*P(1)
220  C(2)=B(2)-C(1)*P(1)-C(0)*P(2)
230  C(3)=B(3)-C(2)*P(1)-C(1)*P(2)-C(0)*P(3)
240  S(1)=C(1)
250  S(2)=C(2)+C(1)*P(1)
260  S(3)=C(3)+C(2)*P(1)+C(1)*P(2)
270  FOR I=1 TO 4
280  FOR J=1 TO 4
290  H(I,J)=0.0
300  NEXT J
310  NEXT I
320  FOR I=1 TO 3
330  H(1,I)=S(I)
340  NEXT I
350  FOR I=2 TO 3
360  FOR J=1 TO 3
370  H(I,J)=H(I-1,J+1)-H(I-1,1)*P(J)
380  NEXT J
390  NEXT I
400  FOR I=1 TO 3
410  FOR J=1 TO 3
```

```
420 D(I,J) = -H(4-J,I)
430 NEXT J
440 NEXT I
450 GOSUB 1000
460 FOR I=1 TO 3
470 P(I)=P(I)+R(I)
480 NEXT I
490 E=ABS(R(1))
500 FOR I=2 TO 3
510 IF E>=ABS(R(I))THEN 530
520 E=ABS(R(I))
530 NEXT I
540 IF E<=0.00001 THEN 560
545 K=K+1
550 GOTO 90
560 FOR I=1 TO 3
570 PRINT P(I)
580 NEXT I
585 PRINT "K=";K
590 GOSUB 2000
592 GOSUB 3000
593 N=N-3
594 IF N< >3 THEN 600
595 FOR I=1 TO 3
596 P(I)=A(I)
597 NEXT I
598 GOSUB 2000
599 GOTO 610
600 GOTO 57
610 END
1000 FOR K=1 TO 2
1010 E=0.0
1020 FOR I=K TO 3
1030 IF ABS(D(I,K))<=ABS(E) THEN 1060
1040 E=D(I,K)
1050 IO=I
1060 NEXT I
1070 IF IO=K THEN 1160
```

```
1080 FOR J=K TO 3
1090 T=D(K.J)
1100 D(K,J)=D(IO,J)
1110 D(IQ,J)=T
1120 NEXT J
1130 T=R(K)
1140 R(K)=R(IO)
1150 R(IO)=T
1160 KP1=K+1
1170 E=1.0/E
1180 R(K)=R(K)*E
1190 FOR J=KP1 TO 3
1200 D(K,J)=D(K,J)*E
1210 FOR I=KP1 TO 3
1220 D(I,J)=D(I,J)-D(I,K)*D(K,J)
1230 NEXJ I
1240 R(J)=R(J)=R(J)-D(J,K)*R(K)
1250 NEXT J
1260 NEXT K
1270 R(3)=R(3)/D(3,3)
1280 FOR K=1 TO 2
1290 I=3-K
1300 E=0.0
1310 IP1=I+1
1320 FOR J=IP1 TO 3
1330 E=E+D(I,J)*R(J)
1340 NEXT J
1350 R(I)=R(I)-E
1360 NEXT K
1370 FOR I=1 TO 3
1380 PRINT R(I)
1390 NEXT I
1400 RETURN
2000 E=P(2)-P(1)*P(1)/3
2010 F=2.0*(P(1)/3.0)∧3-P(1)*P(2)/3+P(3)
2015 PRINT "E="; E, "F="; F
2020 DA=F*F/4.0+(E/3)∧3
2025 PRINT "DA="; DA
```

```
2030 IF DA>O THEN 2090
2040 IF DA<0 THEN 2180
2050 Y1=-SGN(F)*2.0*(ABS(F/2))∧(1.0/3.0)-P(1)/3
2060 Y2=SGN(F)*(ABS(F/2))∧(1.0/3.0)-P(1)/3
2070 PRINT "Y1=", Y1, "Y2=", Y2, "Y3=", Y2
2080 RETURN
2090 DA=SQR(DA)
2100 W1=-F/2+DA
2110 W2=-F/2-DA
2120 W1=SGN(W1)*(ABS(W1))∧(1.0/3.0)
2130 W2=SGN(W2)*(ABS(W2))∧(1.0/3.0)
2140 PRINT "Y1=", W1+W2-P(1)/3
2150 PRINT "Y2R=", -0.5*(W1+W2)-P(1)/3.0, "Y2I=", SQR(3)*(W1-W2)/2
2160 PRINT "Y3R=", -0.5*(W1+W2)-P(1)/3.0, "Y3I=" SQR(3)*(W2-W1)/2
2170 RETURN
2180 W=SQR(-E/3)
2190 T=SQR(-(E/3)∧3)
2195 IF F=0.0 THEN 2205
2200 CC=-F/(2*T)
2202 GOTQ 2210
2205 AF=3.141592653/2
2206 GOTO 2220
2210 AF=ATN(SQR(1-CC*CC)/CC)
2220 Y1=COS(AF/3)
2230 PRINT "Y1=", 2.0*Y1*W-P(1)/3
2240 Y2=COS((AF+2*3.141592653)/3)
2250 PRINT "Y2=", 2.0*Y2*W-P(1)/3
2260 Y3=COS(CAF+4*3.141592653)/3)
2270 PRINT "Y3=", 2.0*Y3*W-P(3)/3
2280 RETURN
3010 FOR I=1 TO 6
3020 E=0.0
3030 FOR J=1 TO I
3040 E=E+A(I-J)*P(J)
3050 NEXT J
3060 A(I)=A(I)-E
3070 NEXT I
3080 PRINT "**…**"
```

```
3090 FOK I=1 TO 6
3100 PRINT A(I)
3110 NEXT I
3120 PRINT "**…**"
3130 RETURN
6000 A(0)=1.0
6010 A(1)=0.0
6020 FOR I=1 TO 6
6030 A(1)=A(1)+X(I)
6040 NEXT I
6050 A(1)=-A(1)
6060 A(2)=0.0
6070 FOR I=1 TO 5
6080 EE(I)=0.0
6090 FOR J=I+1 TO 6
6100 EE(I)=EE(I)+X(J)
6110 NEXT J
6120 EE(I)=EE(I)*X(I)
6130 A(2)=A(2)+EE(I)
6140 NEXT I
6150 A1=X(1)*X(2)*(-A(1)-X(1)-X(2))
6160 A2=X(3)*(X(1)+X(2)*(X(4)+X(5)+X(5)+X(6))
6170 A3=X(4)*(X(5)+X(6))*(X(1)+X(2)+X(3))
6180 A4=X(5)*X(6)*(-A(1)-X(5)-X(6))
6190 A(3)=-(A1+A2+A3+A4)
6200 A1=X(1)*X(2)*X(3)*(X(4)+X(5)+X(6))
6210 A2=X(4)*X(5)*X(6)*(X(1)+X(2)+X(3))
6220 A3=X(3)*X(5)*(X(1)+X(2))*(X(4)+X(6))
6230 A4=X(3)*X(4)*X(6)*(X(1)+X(2))
6240 A5=X(1)*X(2)*X(4)*(X(5)+X(6))
6250 A(4)=X(1)*X(2)*X(5)*X(6)
6260 A(4)=A(4)+A1+A2+A3+A4+A5
6270 A1=X(1)*X(5)*X(6)*((X(2)+X(4))*X(3)+X(2)*X(4))
6280 A2=X(2)*X(3)*X(4)*(X(1)*(X(5)+X(6))+X(5)*X(6))
6290 A(5)=-(A1+A2)
6300 A1=1.0
6310 FOR I=1 TO 6
6320 A1=A1*X(I)
```

```
6330 NEXT I
6340 A(6)=A1
6350 PRINT "'/.'/.'/.'/.···'/.'/."
6360 FOR I=0 TO 6
6370 PRINT A(I)
6380 NEXT I
6390 PRINT "'/.'/.···'/.'/.'/."
6400 P(1)=-(X(1)+X(2)+X(3))
6410 P(2)=X(1)*(X(2)+X(3))+X(2)*X(3)
6420 P(3)=-X(1)*X(2)*X(3)
6430 PRINT "P(1)="; P(1)
6440 PRINT "P(2)="; P(2)
6450 PRINT "P(3)="; P(3)
6460 RETURN.
```

参 考 文 献

〔1〕蔡火螢，劈m次因子法，华侨大学学报，2(1984)，10—19.

The Note of the Method of Cutting a Factor of Degree m

Cai Huoying Xie LiZhi

Abstract

In this paper, We give a polynomial witn real coefficients f(x). We can't cut a factor of degree 1 from the polynomial f(x) nor can we cut a factor of degree 2 from the polynomial f(x). But we can cut a factor of degree 3 from the polynomial f(x) And we have made some theoretical discussions. It follows that to cut a factor of degree m from a polynomial of degree n method has its Significance Here $m \leqslant n/2$.