

# 关于 Yamashita 的论文以及 Lau 和 Liu 的论文的一点注记\*

赖万才 黄心中

(应用数学系)

## 摘 要

Yamashita 以及 Lau 和 Liu 曾先后试图推广 Becker 关于一类正则函数单叶性的一个判别准则, 本文详细指出他们的努力都没有成功, 其先后两篇论文的结果都没有意义。

美国数学会会报第 73 卷(1979 年)上发表的日本人 Yamashita<sup>[1]</sup> 的论文“关于 Duren, Shapiro 和 Shields 的一个定理”和同一杂志第 80 卷(1980 年)上发表的香港大学 Lau Kee-wai, Liu Ming-chit<sup>[2]</sup> 的论文“关于正则函数单叶性的一个判别准则”曾相继试图推广下面的 Becker 关于单位圆上的正则函数单叶性的判别准则。本文的目的在于指出他们的努力都没有获得成功, 已得的结果没有意义。

本文的结论是前一作者察觉, 后一作者证实的。

Becker<sup>[3]</sup> 的判别准则为: 设  $f(z)$  是单位圆  $|z| < 1$  上的非常数的正则函数, 若

$$(1 - |z|^2) \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1, \quad |z| < 1 \quad (1)$$

则  $f(z)$  在单位圆  $|z| < 1$  上是单叶的。

Yamashita 首先以为下述结果推广了 Becker 的判别准则:

设  $f(z)$  是单位圆  $|z| < 1$  上的非常数的正则函数, 若  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$(1 - |z|^2)^\alpha \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq k_\alpha = [\beta^2 + 4(2 - \alpha)]^{\frac{1}{2}} - \beta, \quad \beta = 2^{1+\alpha}, \quad |z| < 1, \quad (2)$$

则  $f(z)$  在单位圆  $|z| < 1$  上是单叶的。

接着 Lau 和 Liu 认为如下结果再度推广了 Becker 的判别准则:

设  $f(z)$  是单位圆  $|z| < 1$  上的非常数的正则函数, 若  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$(1 - |z|^2)^\alpha \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq K_\alpha = [\beta_\alpha^2 + 4(2 - \alpha)]^{\frac{1}{2}} - \beta_\alpha, \quad |z| < 1, \quad (3)$$

其中

本文 1985 年 2 月 17 日收到。

\* 本注记有一个英文缩影发表在《数学进展》第 14 卷(1985)第 3 期。

$$\beta_a = Y_a(1 - Y_a^2)^{1+a} 2(\alpha+1)(2\alpha+1)^{a+3/2}(2\alpha)^{-(1+a)}$$

和

$$Y_a = \frac{\left(\frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{2(2\alpha+1)}$$

则  $f(z)$  在  $|z| < 1$  上是单叶的.

Yamashita、Lau 和 Liu 在他们各自的文章中都指出, 由于 Becker 的判别条件 (1), 在他们各自的条件 (2) 和 (3) 中, 仅当  $k_a$  和  $K_a$  大于 1 时才有意义. Yamashita 证明当  $\alpha \in [0, 0.416\cdots)$  时  $k_a > 1$ , Lau 和 Liu 证明了当  $\alpha \in [0, 0.575\cdots)$  时  $K_a > 1$ , 且  $k_a < K_a$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ .

下面我们来指出即使对于  $k_a > 1$  和  $K_a > 1$  的情形, Yamashita、Lau 和 Liu 的结果也是没有意义的.

我们先证明下述的结论:

设  $f(z)$  是单位圆  $|z| < 1$  上的非常数的正则函数, 若  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$(1 - |z|^2)^a \left| \frac{f'(z)}{f'(z)} \right| \leq h_a = \frac{(3-2\alpha)^{3/2-a}}{[2(1-\alpha)]^{1-a}}, \quad |z| < 1, \quad (4)$$

则 Becker 的判别条件 (1) 满足.

事实上, 令  $r = |z|$ ,  $u(r) = r(-r^2)^{1-a}$ ,  $0 \leq r, \alpha \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{du_a(r)}{dr} &= (1-r^2)^{1-a} - 2(1-\alpha)r^2(1-r^2)^{-a} \\ &= (1-r^2)^{-a} [1 - (3-2\alpha)r^2]. \end{aligned}$$

由令  $\frac{du_a(r)}{dr} = 0$  解得  $r_0 = (3-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ , 并且易知  $u_a(r)$  在  $[0, 1]$  上的  $r_0$  处取最大值, 即

$$|z|(1-|z|^2)^{1-a} \leq \frac{[2(1-\alpha)]^{1-a}}{(3-2\alpha)^{3/2-a}}. \quad (5)$$

若条件 (4) 满足, 则根据 (5),

$$\begin{aligned} (1-|z|^2) \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| &= (1-|z|^2)^a \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \cdot |z|(1-|z|^2)^{1-a} \\ &\leq \frac{(3-2\alpha)^{3/2-a}}{[2(1-\alpha)]^{1-a}} \cdot \frac{[2(1-\alpha)]^{1-a}}{(3-2\alpha)^{3/2-a}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

所以条件 (1) 满足.

这样一来, 如果我们能证明  $h_a > K_a$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , 则 Yamashita 以及 Lau 和 Liu 的判别准则都包含在 Becker 原来的判别准则之中.

分两步来证明.

I) 在  $h_a$  和  $K_a$  都在  $[0, 1]$  上单调减少的条件下, 验证  $h_a > K_a$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ .

ii) 在  $\alpha \in [0.58, 1]$  上,

$$K_a \leq K_{0.58} = 0.9945668, \quad h_a \geq h_1 = 1.$$

故

$$h_a > K_a, \quad \alpha \in [0.58, 1],$$

ii) 在  $\alpha \in [0.2, 0.58]$  上,

$$K_\alpha \leq K_{0.2} = 1.5448199, \quad h_\alpha \geq h_{0.58} = 1.7739987$$

故

$$h_\alpha > K_\alpha, \quad \alpha \in [0.2, 0.58],$$

iii) 在  $\alpha \in [0, 0.1]$  上,

$$K_\alpha \leq K_0 = 2, \quad h_\alpha \geq h_{0.1} = 2.3777673$$

故

$$h_\alpha > K_\alpha, \quad \alpha \in [0, 0.2].$$

II) 验证  $h_\alpha$  和  $K_\alpha$  在  $[0, 1]$  上单调减少.

因为

$$\log h_\alpha = \frac{3-2\alpha}{\alpha} \log(3-2\alpha) - (1-\alpha) \log 2 - (1-\alpha) \log(1-\alpha),$$

$$\frac{h'_\alpha}{h_\alpha} = \log \frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha} < 0.$$

所以  $h_\alpha$  在  $[0, 1]$  上单调减少.

又因为

$$Y_\alpha = \frac{\left[ \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]}{2(\alpha + 1)}$$

$$= \frac{2\alpha}{(2\alpha + 1) \left[ \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]},$$

$$\log Y_\alpha = \log 2 + \log \alpha - \log(2\alpha + 1) - \log \left[ \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{Y'_\alpha}{Y_\alpha} &= \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{2\alpha + 1} - \frac{2(2\alpha^2 + 2\alpha + 1)}{\left[ 1 + \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}} (2\alpha + 1)^2} \\ &= \frac{(2\alpha + 1) \left[ \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} + \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - 2\alpha(2\alpha^2 + 2\alpha + 1)}{\alpha(2\alpha + 1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\geq \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1 + (2\alpha + 1) - 2\alpha(2\alpha^2 + 2\alpha + 1)}{\alpha(2\alpha + 1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4\alpha^2 + 6\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

而

$$B_\alpha = Y_\alpha(1 - Y_\alpha^2)^{1+\alpha} 2(1+\alpha)(1+2\alpha)^{\alpha+3/2}(2\alpha)^{-(1+\alpha)},$$

$$\log B_\alpha = \log Y_\alpha + (1+\alpha) \log(1 - Y_\alpha^2) + \log 2 + \log(1+\alpha)$$

$$+ \left( \frac{3}{2} + \alpha \right) \log(1+2\alpha) - (1+\alpha) \log(2\alpha)$$

$$\frac{B'_\alpha}{B_\alpha} = \frac{Y'_\alpha}{Y_\alpha} + \log(1 - Y_\alpha^2) - \frac{2Y_\alpha Y'_\alpha}{1 - Y_\alpha^2} (1+\alpha) + \frac{1}{1+\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 & + \log(1+2a) + \frac{2a+3}{1+2a} - \log(2a) - \frac{1+a}{a} \\
 & = \frac{Y_a'}{Y_a} - \frac{2Y_a Y_a'}{1-Y_a^2} (1+a) + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{a(1+2a)} + \log(1-Y_a^2) \left(1 + \frac{1}{2a}\right)
 \end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned}
 \log(1-Y_a^2) \left(1 + \frac{1}{2a}\right) & = \log\left(1 + \frac{1}{2a} - Y_a^2 - \frac{1}{2a} Y_a^2\right), \\
 \frac{1}{2a} - Y_a^2 - \frac{1}{2a} Y_a^2 & = \frac{1}{2a} - \frac{2a}{(2a+1) \left[ \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2} \\
 & = - \frac{(4a^2+6a+1) + 2(2a+1) \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} + (2a+1)}{2a(2a+1) \left[ \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^3} \\
 & \quad - \frac{2a}{(2a+1) \left[ \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2} \\
 & > 0
 \end{aligned}$$

这说明  $\log(1-Y_a^2) \left(1 + \frac{1}{2a}\right) > 0$ .

又若记

$$\delta_a = \frac{Y_a'}{Y_a} - \frac{2Y_a^2}{1-Y_a^2} - \frac{Y_a'}{Y_a} (1+a) + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{a(1+2a)}$$

则

$$\begin{aligned}
 \delta_a & = \frac{1}{a(2a+1)} - \frac{2(2a^2+2a+1)}{(2a+1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 & \quad - (a+1) \left\{ \frac{1}{a(2a+1)} - \frac{2(2a^2+2a+1)}{(2a+1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
 & \quad \cdot \left\{ \frac{\frac{8a^2}{(2a+1)^2 \left[ \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2}}{1 - \frac{4a^2}{(2a+1)^2 \left[ \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2}} \right\} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a(2a+1)} \\
 \delta_a & = \frac{1}{a+1} - \frac{2(2a^2+2a+1)}{(2a+1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 & \quad - \frac{8a^2(1+a)}{(2a+1)^2 \left[ \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^3 - 4a^2} \\
 & \quad \cdot \left\{ \frac{1}{a(2a+1)} - \frac{2(2a^2+2a+1)}{(2a+1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4a^2+6a+1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \geq \frac{(2\alpha+1)^2 \left[ \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} + \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - 2(\alpha+1)(2\alpha^2+2\alpha+1)}{(\alpha+1)(2\alpha+1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
& \quad - \frac{\frac{8\alpha(\alpha+1)}{(2\alpha+1)}}{(2\alpha+1)^2 \left[ \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 - 4\alpha^2} \\
& \geq \frac{(2\alpha+1)(4\alpha^2+6\alpha+1) + (2\alpha+1)^2 - 2(\alpha+1)(2\alpha^2+2\alpha+1)}{(\alpha+1)(2\alpha+1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
& \quad - \frac{\frac{8\alpha(\alpha+1)}{(2\alpha+1)}}{(2\alpha+1)^2 \left[ \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 - 4\alpha^2} \\
& \geq \frac{16\alpha}{(\alpha+1)(2\alpha+1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
& \quad - \frac{\frac{8\alpha(\alpha+1)}{(2\alpha+1)}}{(2\alpha+1)^2 \left[ \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 - 4\alpha^2} \\
& = \frac{8\alpha}{A} \left\{ 2(2\alpha+1)(4\alpha^2+6\alpha+1) + 2(2\alpha+1)^2 \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 2(2\alpha+1)^2 \right. \\
& \quad \left. - 8\alpha^2 - (\alpha+1)^2(2\alpha+1) \left[ \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} + \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} > 0,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A &= (\alpha+1)(2\alpha+1)^2 \left[ 1 + \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left\{ (2\alpha+1)^2 \left[ \left( \frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2\alpha+1} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^2 - 4\alpha^2 \right\}.
\end{aligned}$$

这说明  $B_\alpha$  是  $\alpha$  的增加函数。但

$$\begin{aligned}
K_\alpha' &= \frac{B_\alpha B_\alpha' - 2}{\left[ B_\alpha^2 + 4(2-\alpha) \right]^{\frac{1}{2}}} - B_\alpha' \\
&= - \frac{B_\alpha' \left\{ \left[ B_\alpha^2 + 4(2-\alpha) \right]^{\frac{1}{2}} - B_\alpha \right\} + 2}{\left[ B_\alpha^2 + 4(2-\alpha) \right]^{\frac{1}{2}}} < 0.
\end{aligned}$$

于是  $K_\alpha$  在  $[0, 1]$  上单调减少性得证。

## 参 考 文 献

- [1] S. Yamashita, On a theorem of Duren, Shapiro and shields, Proc. Amer. Math. Soc., 73 (1979), 180—182.
- [2] Lau Kee-wai and Liu Ming-chit, On a criterion for the univalence of holomorphic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 80 (1980), 651—652.
- [3] J. Becker, Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen, J. Reine Angew. Math., 255 (1972), 23—43.

## A Remark on the papers of Yamashita, Lau and Liu

Lai Wancal     Huang Xinzhong

## Abstract

Yamashita, Lau and Liu attempted to extend Becker's criterion on the univalence of a function  $f$  holomorphic in the unit disk. This remark points out their endeavours are unsuccessful, i. e., their results are insignificant (see also Adv. Math., 14 (1985), No. 3).