第6卷 第2期　华 侨 大 学 学 报　Vol.6 No.2
1985年5月　JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY　May 1985

对弹性力学的连续性方程的探讨

施 景 勋

（土木工程系）

摘　　要

本文从弹性力学"连續性假定"出发，论述连續性方程必须由相容方程和位移的单值性方程组成。並对此两个方程给予较本质的数学和力学的解释。

弹性力学属数学力学范畴，"连续性假定"是连续体力学模型的最基本的假定之一。"连续性假定"是指物体在外因作用之前是连续体，在外因作用之后虽发生形变，但物体仍然是连续体，各相邻点之间既不发生分离又不相互重叠。"连续性假定"归根结底是指：物体中各点的位移必须用单值的连续函数来描述。因此，保证所选取的位移函数的连续性和单值性是满足"连续性假定"的完整的提法，其判定方程可称之为连续性方程。

在本学科的大多数文献资料中，对"连续性假定"似未给予足够明确的数学描述，有些把相容方程称为弹性力学的连续性方程；在推导相容方程时，目前广泛地流行直接由几何方程导出，因而掩盖了相容方程的数学和力学意义，以致容易使人误认为相容方程亦是几何方程；有些则把相容方程的作用说成：由已知应变分量，用几何方程求位移分量时能得到唯一解的参数联系方程。

本文认为相容方程只是保证位移函数是连续函数的判定方程，但它还不能充分地描述物体的"连续性假定"，只有加上连续函数的单值性方程才能组成对"连续性假定"的完整的数学描述。相容方程与单值性方程一起才可称为连续性方程。只有当函数完全满足这两个方程时，才可作所研究问题的"可能位移函数"。弹性力学作为连续介质力学的组成部份，连续性方程独立地描述物体的一个重要特性且具有普遍意义。它应与平衡微分方程，几何方程和物理方程一起组成弹性力学的基本方程。

为叙述简便起见，本文谨以平面问题为例。

一、关于位移函数的连续性问题

设 u 和 v 是位移的两个分量，它们分别独立且都是 x 和 y 的二元函数，又设它们都是连续函数且下列等式存在：

本文1985年1月9日收到。

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{1}$$

$$dv(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \tag{2}$$

且有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4}$$

若由此两个分量组成的位移亦是连续函数，则决定位移方向的转动分量ω_z亦必须有其全微分存在，即

$$d\omega_z=\frac{\partial \omega_z}{\partial x}dx+\frac{\partial \omega_z}{\partial y}dy$$

且有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y}\right) \tag{5}$$

由于

$$\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},$$

以之代入式(5)得

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

或

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{6}$$

引进几何方程的关系，式(6)变为：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{7}$$

式(6)和式(7)都称为相容方程，它们都是在设定两个独立的连续函数u和v作为位移两个分量后，为了保证位移函数的连续性，根据转动分量场的连续性而导出的。它们都是位移函数是否为连续函数的判定方程，而不是几何方程。式(6)告诉我们按位移求解，当设定位移分量u和v是连续函数时，其组成的位移函数也一定是连续函数。式(7)告诉我们，若按应力求解，事先得到的是应变分量，这些应变分量要满足式(7)的关系才能保证求的位移函数是连续函数。

现把式(7)与几何方程列在一起，

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\
\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\
\gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

这组方程中的相容方程虽指明：欲求u、v而ε_x、ε_x和γ_{xy}之间的必需联系，但它与初

等线性方程组的联系方程有本质的区别：式（8）是偏微分方程组，即使 ε_x、ε_y 和 γ_{xy} 满足相容方程，u 和 v 可积，但积分求得的 u 和 v 並不唯一，这是因为偏微分方程积分的结果将含有若干积分常数，对于不同的约束条件，这些常数是不同的，此外，更重要的原因在于相容方程只保证位移函数是连续的，而并不保证此连续函数具有单值性。因此根据"连续性假定"的含义，不能把相容方程称之为连续性方程。

二、关于位移函数的单值性问题

位移函数的单值性只需讨论它两个分量 u 和 v 的单值性。

如图1所示，已知物体的任意点 M 的位移分量 u_M 和 v_M，求另一任意点 N 的位移分量 u_N 和 v_N 时，若域内所有点的位移都是单值的，那么，沿任何两条曲线 l_1 和 l_2 进行积分，下列等式均成立：

$$\left.\begin{aligned}\int_{l_1} du &= \int_{l_2} du\\ \int_{l_1} dv &= \int_{l_2} dv\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

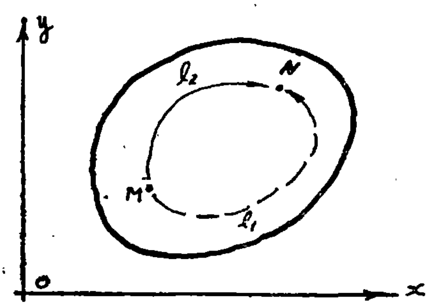

图 1

如果考虑线积分的方向性，式(9)可写成：

$$\left.\begin{aligned}\int_{l_1} du + \int_{-l_2} du &= \oint du = 0\\ \int_{l_1} dv + \int_{-l_2} dv &= \oint dv = 0\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

式(10)是位移连续函数具有单值性的判别式，可称之为位移单值性方程。

式(10)实际上是"积分与路径无关"的问题。我们知道，对于围线所包围的单连域（例如图1所示），只要位移分量用连续函数来描述，必有式(3)和式(4)关系存在；而式(3)和式(4)的存在，式(10)必然成立。因此对单连域问题来说，只要位移分量（或由它们决定的应变分量）满足相容方程，也必然满足位移单值性方程，即满足"连续性假定"条件，所以对于单连域问题相容方程同连续性方程是等价的。然而，尽管如此，也不宜把相容方程称为连续性方程，否则在概念上将引起混乱。

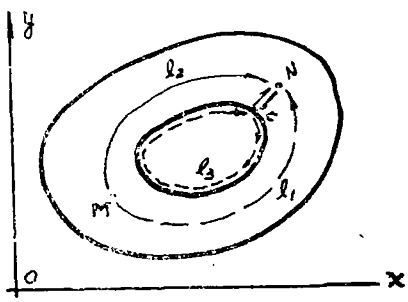

图 2

现讨论多连域问题(见图2)，已知域内任意点 M 的位移分量 u_M 和 v_M，求任意点 N 的位移分量 u_N 和 v_N 时，为了能采用"积分与路径无关"的结论，将围线（l_1 和 l_2）所包围的多连域变成单连域，即假想地把多连域在任意位置上切开，假如在 N 和 C 点切开，对这个切开后的单连域，由于式(3)和式(4)成立，

故

$$\oint du=\int_{l_1}du+\int_{l_3}du+\int_{-l_2}du=0$$

$$\oint dv=\int_{l_1}dv+\int_{l_3}dv+\int_{-l_2}dv=0$$

即

$$\left.\begin{aligned}\int_{l_1}du+\int_{l_3}du=\int_{l_2}du\\ \int_{l_1}dv+\int_{l_3}dv=\int_{l_2}dv\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中：$\int_{l_3}du$ 和 $\int_{l_3}dv$ 是沿孔洞周界的线积分，因而

$$\left.\begin{aligned}\int_{l_3}du=\oint_{l_3}du\\ \int_{l_3}dv=\oint_{l_3}dv\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式(12)显然均不恒等于零，因为 l_3 所包围的域不是积分域，不能用“积分与路径无关”的结论，它是普通的线积分，其值将随(沿孔洞周界)积分的次数而变。因此从式(11)可知，当按应力求解时，对于多连域，由于有孔洞存在，即使应变分量满足相容方程，要积分求位移，沿某一条路径(例如 l_2)的积分总等于“沿另一路径(例如 l_1)的线积分与沿孔洞周界(例如 l_3)的线积分之和，”因而位移函数的单值性得不到保证，这与“连续性假定”相矛盾，这时积分求得的函数尽管是连续函数，但不能作为所研究问题的“可能位移函数”，为了符合“连续性假定”，我们必须对连续函数进一步筛选，即强令产生不定值项为零，即

$$\left.\begin{aligned}\oint_{l_3}du=0\\ \oint_{l_3}dv=0\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式(13)可以认为是更普遍性的位移单值性方程，当按位移求解时，如果选定的位移分量 u 和 v 明确是单值的连续函数，它不含有不定值项，因而自然满足式(13)的条件，当按应力求解，应变分量满足相容方程时，如果是单连域问题，它没有孔洞，自然满足式(13)条件，如果是多连域问题，只有位移函数同时满足相容方程和单值性方程，“连续性假定”才能得到保证。

三、结 语

本文从“连续性假定”出发，明确地提出连续性方程由相容方程和位移单值性方程组成，并对这两个方程给予较本质的数学和力学的解释。

连续性方程具有普遍的意义，它独立地描述了连续体力学模型的一个重要特性——连续

性，在弹性力学中不管按位移求解或按应力求解，它都是选择“可能位移函数”的一种判据，本文中的一些结论，虽然过去我们亦在应用，但概念不划一和不够明确，鉴于上述情况，我们认为应把连续性方程列为弹性力学的基本方程之一。

参　考　文　献

〔1〕徐芝綸，弹性力学，人民教育出版社，(1979).
〔2〕钱伟长、叶开沅，弹性力学，科学出版社，(1980).
〔3〕王龙甫，弹性理论，科学出版社，(1979).
〔4〕杨桂通．弹塑性力学，人民教育出版社，(1980).

Approach on the Continuity Eguation of Elasticity

Shi Jingxun

Abstract

This article is dealing with continuity eguation which must be made up of compatibility eguation and uniguenss eguation of translation from the ujew point of "the hypothesis of the continuity" of elasticity; In the course of discussion mathematics and mechanics cre also rather essentially explained.