第6卷 第2期　华侨大学学报　Vol.6 No.2
1985年5月　JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY　May 1985

计算Fourier系数的另一种方法

陈 森 年

（应用物理系）

提　　要

本文讨讨了周期函数的Fourier展开，给出了求Fourier系数的另一类型公式，它将该系数用函数的各阶导数 $f^{(K)}(0)$（$K=0、1、\cdots$）组成的级数〔式(2)′(3)′(4)′表示出来，类似于Taylor级数那样。本文公式与熟知的Euler-Fourier公式比较，一个借助求导数，一个借助求积分，它们各有所长。当积分遇到困难时只要函数满足定理条件，就可按本公式展开。例如定义于〔$-\pi,\pi$〕中的 $ln(1+\sqrt{1+(\frac{x}{\pi})^2})$ 等。

本文求出并证明了文献〔3〕中尚未见到的级数和：式(23)′。

一. 引　言

周期函数展为Fourier级数时，若将周期函数表为系数待定的Fourier级数，约定用Poisson-Abel法求和，按Fatou定理，对两边依次求导后以初始条件 $f^{(K)}(0)$ $(k=0,1,\cdots)$ 代入，便得到由待定的Fourier系数组成的无限元线性方程组。对 n 元方程组求解并取极限，得出以累级数形式表示的系数公式。借助Rieman的Zeta函数 $\zeta(2k)$ 为媒介，计算并证明了有关数值级数的和及规律性后便达到最后结果：式(2)′(3)′(4)′。

最后讨论 x^{2n}，带参数 ϕ 的 x 的函数 $e^{\frac{x}{\pi}\cos\phi}\cos\left(\frac{x}{\pi}\sin\phi\right)$ 以及 $\ln\left(1+\sqrt{1+(\frac{x}{\pi})^2}\right)$ 的展开。前者表明某些类型函数用本公式远为简单；第二个例表明积分遇到困难的某些场合，可用本公式成功地展开；最后一例表明某些情况下，可借查Taylor级数表而写出周期化后的函数的Fourier级数。

二. 累级数形式的Fourier系数公式

定理　设以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 可展为一致收敛的Fourier级数；在点 $x=0$ 处，存在不全等于0的有界的各阶导数，且 $|f^{(k)}(0)|\leqslant L^K(k=0,\ 1,\ \cdots)$，这里 L 系与 K 无关的正数。那么，其Fourier级数

本文1984年12月12日收到。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_K\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin kx \tag{1}$$

的系数是

$$A_0=D_0+D_2\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)+D_4\left(\sum_{1\leq i<j}^{\infty}\frac{1}{i^2j^2}\right)+\cdots+D_{2N}\left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_N}^{\infty}\frac{1}{i_1^2\cdots i_N^2}\right)+\cdots \tag{2}$$

$$A_K=\frac{(-1)^K2}{K^2}\left\{D_2+D_4\left(\sum_{\substack{1\leq i\\ i\neq K}}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)+D_6\left(\sum_{\substack{1\leq i<j\\ i,j\neq k}}^{\infty}\frac{1}{i^2j^2}\right)+\cdots+D_{2N}\left(\sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_{N-1}\\ i_1\cdots i_{N-1}\neq K}}^{\infty}\frac{1}{i_1^2\cdots i_{N-1}^2}\right)+\cdots\right\}$$

$$(k=1,2,\cdots) \tag{3}$$

$$B_K=\frac{(-1)^K2}{K}\left\{D_1+D_3\left(\sum_{\substack{1\leq i\\ i\neq K}}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)+D_5\left(\sum_{\substack{1\leq i<j\\ i,j\neq k}}^{\infty}\frac{1}{i^2j^2}\right)+\cdots+D_{2N-1}\left(\sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_{N-1}\\ i_1\cdots i_{N-1}\neq k}}^{\infty}\frac{1}{i_1^2\cdots i_{N-1}^2}\right)+\cdots\right\}$$

$$(k=1,2,\cdots) \tag{4}$$

其中

$$D_K=f^{(K)}(0)\qquad (k=0,1,\cdots) \tag{5}$$

证明　在定理条件下，如约定式(1)右边求各阶导数所得的级数，都按 Poisson-Abel 法求和[1]，那么按 Fatou 定理，可以取式(1)对 x 各阶导数，并以 $x=0$时的值 $f^{(K)}(0)$ $(k=0,1,\cdots)$ 代入，便得

$$\begin{cases} A_0+A_1r+\quad A_2r^2+\cdots+\quad A_Nr^N+\cdots=a_0\\ \quad A_1r+\ 2^2A_2r^2+\cdots+\ N^2A_Nr^N+\cdots=a_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \quad A_1r+2^{2N}A_2r^2+\cdots+N^{2N}A_Nr^N+\cdots=a_N\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} B_1r+2B_2r^2+\cdots+\qquad NB_Nr^N+\cdots\qquad=b_1\\ B_1r+2^3B_2r^2+\cdots+\qquad N^3B_Nr^N+\cdots\qquad=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ B_1r+2^{2N-1}B_2r^2+\cdots+N^{2N-1}B_Nr^N+\cdots=b_N\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{7}$$

其中 $0<r<1$，而作为 r 的函数的：

$$\begin{cases} a_K=\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\partial^{2K}}{\partial x^{2K}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}du\right]_{x=0} & (k=0,1,\cdots)\\ b_K=\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\partial^{2K-1}}{\partial x^{2K-1}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}du\right]_{x=0} & (k=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{8}$$

显然，这些 Poisson 积分有极限：

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to1}a_K=(-1)^Kf^{(2K)}(0)=(-1)^KD_{2K} & (k=0,1,\cdots)\\ \lim\limits_{r\to1}b_K=(-1)^{K+1}f^{(2K-1)}(0)=(-1)^{K+1}D_{2K-1} & (k=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{9}$$

方程组 (6) 中取前 $N+1$ 个方程，每个方程保留 A_Nr^N 以前项；而方程组 (7) 中取 N 个方程，每个方程保留 B_Nr^N 以前项，组成

$$\begin{cases}\begin{cases}A_0+A_1r+A_2r^2+\cdots+A_Nr^N=a_0(N)\\ A_1r+2^2A_2r^2+\cdots+N^2A_Nr^N=a_1(N)\\ \cdots\cdots\\ A_1r+2^{2N}A_2r^2+\cdots+N^{2N}A_Nr^N=a_N(N)\end{cases} & (6)'\\ \begin{cases}B_1r+2B_2r^2+\cdots+NB_Nr^N=b_1(N)\\ B_1r+2^3B_2r^2+\cdots+N^3B_Nr^N=b_2(N)\\ \cdots\cdots\\ B_1r+2^{2N-1}B_2r^2+\cdots+N^{2N-1}B_Nr^N=b_N(N)\end{cases} & (7)'\end{cases}$$

其中

$$a_k(N)=a_k-\sum_{j=N+1}^{\infty}j^{2k}A_jr^j \qquad (k=0,1,\cdots) \tag{10}$$

$$b_k(N)=b_k-\sum_{j=N+1}^{\infty}j^{2K-1}B_jr^j \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{11}$$

由于各阶导级数收敛性，必有

$$\lim_{N\to\infty}a_K(N)=a_K \qquad (k=0,1,\cdots) \tag{12}$$

$$\lim_{N\to\infty}b_K(N)=b_K \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{13}$$

方程组(6)′(7)′系数行列式：

$$\Delta_a(N)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&2^2&\cdots&N^2\\0&1&2^4&\cdots&N^4\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1&2^{2N}&\cdots&N^{2N}\end{vmatrix}=(N!)^2\prod_{1\le i<j\le N}(j^2-i^2) \tag{14}$$

$$\Delta_b(N)=\begin{vmatrix}1&2&\cdots&N\\1&2^3&\cdots&N^3\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&2^{2N-1}&\cdots&N^{2N-1}\end{vmatrix}=N!\prod_{1\le i<j\le N}(j^2-i^2) \tag{15}$$

按Cramer法则，式(6)′(7)′存在唯一解，解之得：

$$A_0(N)=a_0(N)-a_1(N)\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i^2}\right)+a_2(N)\left(\sum_{1\le i<j}^{N}\frac{1}{i^2j^2}\right)+\cdots+(-1)^N\frac{a^N(N)}{(N!)^2} \tag{16}$$

$$r^kA_k(N)=\frac{(-1)^{k+1}2(N!)^2}{K^2(N+K)!(N-K)!}\left\{a_1(N)-a_2(N)\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{N}\frac{1}{i^2}\right)\right.$$

$$\left.+a_3(N)\left(\sum_{\substack{1\le i<j\\i,\,j\neq k}}^{N}\frac{1}{i^2j^2}\right)+\cdots+\frac{(-1)^{N+1}K^2}{(N!)^2}a_N(N)\right\} \quad (K=1,2,\cdots) \tag{17}$$

$$r^kB_k(N)=\frac{(-1)^{K+1}2(N!)^2}{K(N+K)!(N-K)!}\left\{b_1(N)-b_2(N)\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{N}\frac{1}{i^2}\right)\right.$$

$$+b_3(N)\left(\sum_{\substack{1\leq j<l\\ i,j\neq k}}^{N}\frac{1}{i^2j^2}\right)+\cdots+\frac{(-1)^{N+1}K^2}{(N!)^2}b_N(N)\Bigg\}\ (k=1,2,\cdots) \tag{18}$$

显然，$N\to\infty$时，$A_0(N)\to A_0$；$A_K(N)\to A_k$ 及 $B_k(N)\to B_k(k=1,2,\cdots)$。此外，对于一切有限的$K$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(N!)^2}{(N+K)!(N-K)!}=1$$

顾及式(9)(12)(13)，令$N\to\infty$，$r\to1$，即得式(2)(3)(4)。

式(16)(17)(18)的末项绝对值满足

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt[n]{\frac{K^2|a_N(N)|}{(N!)^2}}\leqslant\lim_{N\to\infty}\sqrt[n]{\frac{K^2L^{2N}}{(N!)^2}}=0$$

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt[n]{\frac{K^2|b_N(N)|}{(N!)^2}}\leqslant\lim_{N\to\infty}\sqrt[n]{\frac{K^2L^{2N-1}}{(N!)^2}}=0$$

式(16)(17)(18)中倒数有限项(即通项)也具有相同性质。我们以式(16)为例来证明这点。考察$A_0(N)$中第$N-r+1$项

$$|a_{N-r}(N)|\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-r}}^{N}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-r}}\right)=\frac{|a_{N-r}(N)|\left(\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r}^{N}i_1^2\cdots i^2_r\right)}{(N!)^2}$$

而 $\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r}^{N}i_1^2\cdots i^2_r$ 共有$N(N-1)\cdots(N-r+1)$项，其最大项的值是$N^2(N-1)^2\cdots(N-r+1)^2$，因此，$\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r}^{N}i_1{}^2\cdots i_r{}^2<N^3(N-1)^3\cdots(N-r+1)^3$，而$\lim\limits_{N\to\infty}|a_{N-r}(N)|\leqslant L^{2N-2r}$，故当$r$有限时

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt[N-r]{|a_{N-r}(N)|\cdot\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-1}}^{N}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-r}}}$$

$$<\lim_{N\to\infty}\sqrt[N-r]{\frac{L^{2(N-r)}N(N-1)\cdots(N-r+1)}{(N-r)!(N-r)!}}=0\ \text{证毕}$$

于是，按 Cauchy 判别法，我们得到结论：在定理条件下，式(16)(17)(18)绝对收敛。令$r\to1$便得式(2)(3)(4)。

式(1)收敛性留到最后再讨论较为方便。

三．最后形式的 Fourier 系数公式

式(2)，(3)，(4)中包含如下级数：

$$S_N=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_N}^{\infty}\frac{1}{i_1^2\cdots\cdots i^2_N}\qquad(N=1,2,\cdots) \tag{19}$$

以及

$$S_{N(\neq K)}=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_N\\ i_1\cdots i_N\neq K}}^{\infty}\frac{1}{i_1^2\cdots\cdots i^2_N}\qquad(K,N=1,2,\cdots) \tag{20}$$

先计算 S_N。可以证明各 $S_K(K=1,2,\cdots N)$ 之间存在如下关系：

$$S_N=\frac{1}{N}\left\{S_{N-1}\cdot\zeta(2)-S_{N-2}\cdot\zeta(4)+\cdots+(-1)^N S_1\cdot\zeta(2N-2)+(-1)^{N+1}\zeta(2N)\right\}$$

$$(N=1,2,\cdots) \tag{21}$$

这里 $\zeta(2)$，$\zeta(4)$，…表 Rieman $\zeta(2k)$ 函数。

证明 显然

$$S_1S_{N-1}=\frac{1}{1^2}S_{N-1}+\frac{1}{2^2}S_{N-1}+\cdots$$

将第一项 S_{N-1} 中含 1^2 因子和不含 1^2 因子的项分开，第二项 S_{N-1} 中含 2^2 因子和不含 2^2 因子的项分开，第三项…，得

$$S_1S_{N-1}=\frac{1}{1^2}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-1}\\ i_1\cdots i_{N-1}\neq 1}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-1}}\right)+\frac{1}{1^4}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-2}\\ i_1\cdots i_{N-2}\neq 1}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-2}}\right)$$

$$+\frac{1}{2^2}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-1}\\ i_1\cdots i_{N-1}\neq 2}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-1}}\right)+\frac{1}{2^4}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-2}\\ i_1\cdots i_{N-2}\neq 2}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-2}}\right)$$

$$+\cdots\cdots$$

将第一行第一项 $1/1^2$ 乘入，第二行第一项 $1/2^2$ 乘入……便组成 S_N 中一切项。不但如此，组成 S_N 的每一项都出现 N 次。所以，各行第一项之和等于 NS_N。至于第一行第二项，括号内只要加上 $\frac{1}{1^2}\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-3}\\ i_1\cdots i_{N-3}\neq 1}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-3}}$ 就成了 S_{N-2}，对其他各行第二项作相似处理，得

$$S_1S_{N-1}=NS_N+\frac{1}{1^4}\left[S_{N-2}-\frac{1}{1^2}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-3}\\ i_1\cdots i_{N-3}\neq 1}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-3}}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2^4}\left[S_{N-2}-\frac{1}{2^2}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-3}\\ i_1\cdots i_{N-3}\neq 2}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-3}}\right)\right]+\cdots\cdots$$

$$=NS_N+\zeta(4)S_{N-2}-\frac{1}{1^6}\left[S_{N-3}-\frac{1}{1^2}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-4}\\ i_1\cdots i_{N-4}\neq 1}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-4}}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2^6}\left[S_{N-3}-\frac{1}{2^2}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-4}\\ i_1\cdots i_{N-4}\neq 1}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-4}}\right)\right]+\cdots$$

$$=NS_N+\zeta(4)S_{N-2}-\zeta(6)S_{N-3}+\frac{1}{1^8}\left[S_{N-4}-\frac{1}{1^2}\left(\sum^{\infty}_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-5}\\ i_1\cdots i_{N-5}\neq 1}}\frac{1}{i_1^2\cdots i^2_{N-5}}\right)\right]+\frac{1}{2^8}\left[\;\right]+\cdots$$

依此类推，最后移项即得式 (21)。

从式 (21) 出发，借助 $\zeta(2k)$ 函数与 Bernoulli 数之间关系[2]：

$$\zeta(2k)=(-1)^{K-1}(2\pi)^{2K}\frac{B_{2K}}{2(2k)!}\qquad(k=1,2,\cdots) \tag{22}$$

以及 Bernoulli 数表[3]，可求得

$$S_1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{3!}$$

$$S_2=\sum_{1\leqslant i<j}^{\infty}\frac{1}{i^2j^2}=\frac{\pi^4}{5!}$$

$$S_3=\frac{\pi^6}{7!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{23}$$

可以证明

$$S_N=\frac{\pi^{2N}}{(2N+1)!}\qquad(N=1,2,\cdots) \tag{23$'$}$$

如所周知

$$e^{ax}=\frac{\operatorname{sh}a\pi}{a\pi}+\frac{\operatorname{sh}a\pi}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^K}{a^2+K^2}\left(a\cos kx-k\sin kx\right)$$

其常数项

$$A_0=\frac{\operatorname{sh}a\pi}{a\pi}=1+\frac{(a\pi)^2}{3!}+\cdots+\frac{(a\pi)^{2N}}{(2N+1)!}+\cdots$$

另一方面，$\left.\frac{d^K}{dx^K}(e^{ax})\right|_{x=0}=a^K\ (k=0,1,\cdots)$代入式(2)求得$A_0$，两者比较便得式(23)$'$证毕。

其次再考察级数(20)。这级数$S_{N(\neq K)}$与S_N的区别是少了$\frac{1}{K^2}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-1}\\ i_1\cdots i_{N-1}\neq K}}^{\infty}\frac{1}{i_1^2\cdots i_{N-1}^2}\right)$项，即

$$S_{N(\neq K)}=S_N-\frac{1}{K^2}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{N-1}\\ i_1\cdots i_{N-1}\neq k}}^{\infty}\frac{1}{i_1^2\cdots i_{N-1}^2}\right)\qquad(N=1,2,\cdots) \tag{24}$$

这实是一个递推公式，由此可得：

$$S_{N(\neq K)}=S_N-\frac{S_{N-1}}{K^2}+\frac{S_{N-2}}{K^4}\cdots+\frac{(-1)^{N-1}S_1}{K^{2N-2}}+\frac{(-1)^N}{K^{2N}}\qquad(N,K=1,2,\cdots) \tag{25}$$

实际计算时，下列关系式或有用处

$$1-S_{1(\neq K)}+S_{2(\neq K)}-S_{3(\neq K)}+\cdots=\begin{cases}0 & 当\ K=0,2,3,\cdots\ 时\\ \frac{1}{2} & 当\ K=1\ 时\end{cases} \tag{26}$$

事实上，由式(6)知，当$a_K=1\ (k=0,1,2,\cdots)$时，$A_1=1$，$A_K=0\ (K=0,2,3)$。顾及式(9)，代入式(3)即得(26)式。

以式(23)、(25)代入式(2)、(3)、(4)，便得展开式(1)的Fourier系数的最终表达式：

$$A_0=D_0+\frac{\pi^2}{3!}D_2+\frac{\pi^4}{5!}D_4+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^{2K}}{(2K+1)!}D_{2K} \tag{2$'$}$$

$$\begin{aligned}A_K&=\frac{(-1)^K2}{K^2}\left\{D_2+\left(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{K^2}\right)D_4+\left(\frac{\pi^4}{5!}-\frac{\pi^2}{K^2 3!}+\frac{1}{K^4}\right)D_6+\cdots\right\}\\&=\frac{(-1)^K2}{K^2}\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j\pi^{2N-2j}}{K^{2j}(2N+1-2j)!}\right)D_{2N+2}\qquad(k=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{3$'$}$$

$$B_K=\frac{(-1)^{K+1}2}{K}\left\{D_1+\left(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{K^2}\right)D_3+\left(\frac{\pi^4}{5!}-\frac{\pi^2}{K^2 3!}+\frac{1}{K^4}\right)D_5+\cdots\right\}$$

$$=\frac{(-1)^{K+1}2}{K}\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j\pi^{2N-2j}}{K^{2j}(2N+1-2j)!}\right)D_{2N+1}\qquad(k=1,2,\cdots)\qquad(4)'$$

最后讨论具有系数(2)′(3)′(4)′的式(1)的收敛性。易证

$$\left\{D_2+\left(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{K^2}\right)D_4+\left(\frac{\pi^4}{5!}-\frac{\pi^2}{3!K^2}+\frac{1}{K^4}\right)D_6+\cdots\right\}$$

$$<\left\{D_2+\frac{\pi^2}{3!}D_4+\frac{\pi^4}{5!}D_6+\cdots\right\}<M$$

既然级数收敛其和必有界。这里 M 表某个上界。于是，$\sum_{k=0}^{\infty}A_K\cos kx$ 因有优势级数 $2M\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{K^2}$ 而绝对收敛。至于 $\sum_{k=1}^{\infty}B_K\sin kx$，唯一引起担心的是分母为 K 的一次方的项，这部分等于

$$2\left(D_1+\frac{\pi^2}{3!}D_3+\frac{\pi^4}{5!}D_5+\cdots\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^K\sin kx}{K}\right)$$

但它也在 $[-\pi,\pi]$ 中收敛。

剩下要证明的是 $\sum_{k=0}^{\infty}A_K\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}b_K\sin kx=g(x)$ 与待展函数 $f(x)$ 处处相等。为此制作周期函数：$\phi(x)=f(x)-g(x)$，对 $\phi(x)$ 用本文步骤进行 Fourier 展开，可从它 Fourier 系数全等 0 推出 $\phi(x)\equiv 0$。全文证毕。

四．举　例

例 1　　$f(x)=x^{2N},\quad x\in[-\pi,\pi]$

以 2π 为周期，将 $f(x)$ 向整个实轴延拓。于是它满足定理要求的所有条件。

因 $D_{2N}=(2N)!$ 而其他 D_K 全等 0，按式 (1)，(2)′，(3)′，(4)′，得

$$x^{2N}=(2N)!\left\{\frac{\pi^{2N}}{(2N+1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^K 2\cos Kx}{K^2}\left(\frac{\pi^{2(N-1)}}{(2N-1)!}-\frac{\pi^{2(N-2)}}{K^2(2N-3)!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-1}}{K^{2(N-1)}}\right)\right\}$$

当 $N=1,2$ 时，即得熟知结果：

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^K\cos kx}{K^2}$$

$$x^4=4!\left\{\frac{\pi^4}{5!}+\frac{2\pi^2}{3!}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^K\cos kx}{K^2}\right)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^K\cos kx}{K^4}\right\}$$

例 2　　$f(x)=e^{\frac{x}{\pi}\cos\phi}\cos\left(\frac{x}{\pi}\sin\phi\right)\qquad x\in[-\pi,\pi]$

采取例1相同措施后，可用本公式。按 Leibniz 关于函数积的高阶微商定理，得

$$\frac{d^N f}{dx^N}=\frac{e^{\frac{x}{\pi}\cos\phi}}{\pi^N}\Big\{\cos^N\phi\cdot\cos\left(\frac{x}{\pi}\sin\phi\right)-C_N^1\cos^{N-1}\phi\cdot\sin\phi\sin\left(\frac{x}{\pi}\sin\phi\right)$$

$$-C_N^2\cos^{N-2}\phi\cdot\sin^2\phi\cdot\cos\left(\frac{x}{\pi}\sin\phi\right)+C_N^3\cos^{N-3}\phi\cdot\sin^3\phi\cdot\sin\left(\frac{x}{\pi}\sin\phi\right)$$

$$+C_N^4\cos^{N-4}\phi\cdot\sin^4\phi\cdot\cos\left(\frac{x}{\pi}\sin\phi\right)-\cdots\cdots\Big\}$$

令 $x=0$，顾及 $\cos n\phi=\sum_{j=0}^{N}(-1)^jC_N^{2j}\cos^{N-2j}\phi\cdot\sin^{2j}\phi$后，得

$$D_N=\left.\frac{d^N f}{dx^N}\right|_{x=0}=\frac{\cos n\phi}{\pi^N}\qquad (N=1,2,\cdots)$$

代入式(2)′,(3)′,(4)′及(1)，得：

$$e^{\frac{x}{\pi}\cos\phi}\cdot\cos\left(\frac{x}{\pi}\sin\phi\right)=\left(1+\frac{\cos 2\phi}{3!}+\frac{\cos 4\phi}{5!}+\cdots\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^K 2}{K^2}\Big\{\frac{\cos 2\phi}{\pi^2}+\left(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{K^2}\right)\frac{\cos 4\phi}{\pi^4}+\Big(\frac{\pi^4}{5!}-\frac{\pi^2}{K^2 3!}+$$

$$+\frac{1}{K^4}\Big)\frac{\cos 6\phi}{\pi^6}+\cdots\cdots\Big\}\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2}{K}\Big\{\frac{\cos\phi}{\pi}+$$

$$+\left(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{K^2}\right)\frac{\cos 3\phi}{\pi^3}+\left(\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^2}{K^2 3!}+\frac{1}{K^4}\right)\frac{\cos 5\phi}{\pi^5}+\cdots\Big\}\sin kx$$

例 3　　$\ln\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\right]$　　$x\in[-\pi,\pi]$

先将函数延拓为以 2π 为周期函数。既然以 $D_K(k=0,1,\cdots)$ 代入不同式子，可同时得到 *Taylor* 级数和 *Fourier* 级数，我们便可利用现有的 *Taylor* 级数表直接写出某些函数的 *Fourier* 级数。例如[4]

$$\ln\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{x}\right)^2}\right]=\ln 2-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(2j-1)!}{2^{2j}(j!)^2\pi^{2j}}x^{2j}$$

所以

$$D_0=\ln 2$$

$$D_{2j}=\frac{(-1)^{j+1}(2j-1)!}{2^{2j}(j!)^2\pi^{2j}}\qquad (j=1,2,\cdots)$$

于是

$$\ln\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\right)=\left(\ln 2+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}(2j-1)!}{2^{2j}(j!)^2(2j+1)!}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2}{K^2}\Big\{\frac{1}{(2\pi)^2}-\left(\frac{\pi^2}{3!}-\frac{1}{K^2}\right)\frac{3!}{(2\pi)^4(2!)^2}+$$

$$\left(\frac{\pi^2}{5!}-\frac{\pi^2}{k^2 3!}+\frac{1}{k^4}\right)\frac{5!}{(2\pi)^6(3!)^2}+\cdots\Big\}\cos kx$$

参 考 文 献

〔1〕陈建功，三角级数论《上册》上海科学技术出版社，(1964)。

〔2〕H. Bateman. 遗稿，A. Erdelyi. 主编，高级超越函数，科学技术出版社，(1957)，37.

〔3〕〔4〕I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and products, Academic press London, (1980), 45—1077.

The Second Kind of Formulas to the Fourier Coefficients of Series Expansion for a Periodic Function

Chen Sennlan

Abstract

This paper discusses the Fourier expansion of an periodic fuuction $f(x)$ and has got a different kind of formulas about Fourier coefficients. They are expressed in terms of series (2)′(3)′(4)′, composed of its derivatives of various orders $f^{(k)}(0)$ $(k=0,1,\cdots)$, similar to the Taylor-Maclaurin's series. In addition to the well-known Enler-Fourier formulas, there are two methods, one depends on integration and the other on differentiation. A fuuction, if being difficult to integrate but satisfied the theorem's conditions, could be expanded according to the formulas here. For example, $\ln\{1+[1+(x/\pi)^2]^{1/2}\}$ in the domain $[-\pi,\pi]$.

For the purpose of this paper, we study some properties and derive and prove the sums of the numerical series (23)′ which have not been found in table [3] yet.