第6卷 第2期　　华 侨 大 学 学 报　　Vol.6 No.2
1985年5月　　JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY　　May 1985

加权最小二乘估计的误差分析

陈 兴 钧

（应用数学系）

摘　　要

本文是参考文献〔1〕的一个注记。它从理论上进一步证明了文〔1〕中所采用的加权最小二乘估计方法，确实可以提高估计的精度。

（一）问题的提出

文〔1〕中已给出了由多点阵获得的次声信号计算台风方向角 α 的方法。设已计算得到 α_1，α_2，$\cdots\alpha_n$。它们的协方差阵为：

$$M=\begin{pmatrix}\sigma^2_{\alpha_1} & \sigma_{\alpha_1\alpha_2} & \cdots & \sigma_{\alpha_1\alpha_n}\\ \sigma_{\alpha_2\alpha_1} & \sigma^2_{\alpha_2} & \cdots & \sigma_{\alpha_2\alpha_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{\alpha_n\alpha_1} & \sigma_{\alpha_n\alpha_2} & \cdots & \sigma^2_{\alpha_n}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

且

$$E\cdot\alpha_i=\alpha \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

记 M 的逆阵为：

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}\xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n}\\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn}\end{pmatrix}$$

文〔1〕还给出了由 α_i（$i=1,\ 2,\ \cdots n$），以 M^{-1} 为加权阵，求 α 的加权最小二乘估计 $\hat{\alpha}$ 及其误差方差 $\sigma^2_{\hat{\alpha}}$ 的公式：

$$\sigma^2_{\hat{\alpha}}=1\Big/\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}$$

那么下式是否成立呢？

本文1984年12月26日收到。

$$\sigma^2_{\hat{a}} \leqslant \sigma^2_{a_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

回答是肯定的。本文给出一个理论上的证明。

（二）问题的证明

易见矩阵 M 具有以下性质：

1 对称性：$b_{ij}=b_{ji}$

2 非负定性：对任意 n 及任意实数 $c_1\cdots c_n$，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j b_{ij} \geqslant 0$$

考虑到实际应用的情况，还可进一步假定 M 是一个正定阵。

下面我们应用数学归纳法证明：

$$\sigma^2_{\hat{a}} \leqslant \sigma^2_{a_l} \qquad (l=1,\ 2,\ \cdots n)$$

当 $n=2$ 时，结论成立。因为这时

$$M=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} \qquad M^{-1}=\frac{1}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}\begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11}\end{pmatrix}$$

所以，要证

$$\sigma^2_{\hat{a}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\xi_{ij}}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{b_{11}+b_{22}-2b_{12}} \leqslant b_{11}$$

只要能证明：

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2 \leqslant b_{11}(b_{11}+b_{22}-2b_{12})$$

因为 $$(b_{11}-b_{12})^2 \geqslant 0$$

故证得 $\sigma^2_{\hat{a}} \leqslant b_{11}=\sigma^2_{a_1}$。类似可证 $\sigma^2_{\hat{a}} \leqslant \sigma^2_{a_2}$。

今假定 $n=k$ 时，结论成立。即设

$$M_k=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk}\end{pmatrix} \qquad M_k^{-1}\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1k} \\ \vdots & & \\ \xi_{k1} & \cdots & \xi_{kk}\end{pmatrix}$$

且 $$\sigma^2_{\hat{a}}=1\Big/\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\xi_{ij} \leqslant b_{ll} \quad (l=1,\ 2,\ \cdots k)$$

要证 $n=k+1$ 时，结论也成立。令

$$M_{k+1}=\left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & \cdots & b_{1k} & b_{1,k+1} \\ & & & \\ b_{k1}, & \cdots & b_{kk} & b_{k,k+1} \\ \hline b_{k+1,1}, & \cdots & b_{k+1,k}, & b_{k+1,k+1}\end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$M_{k+1}^{-1}=\left(\begin{array}{ccc|c} \xi'_{11} & \cdots & \xi'_{1k} & \xi'_{1k+1} \\ \vdots & & & \\ \xi'_{k1} & \cdots & \xi'_{kk} & \xi'_{kk+1} \\ \hline \xi'_{k+1,1} & \cdots & \xi'_{k+1,k} & \xi'_{k+1\,k+1} \end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

利用分块求逆阵的方法[2]，得

$$A_{11}^{-1}=M_k^{-1}=\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1k} \\ \vdots & & \\ \xi_{k1} & \cdots & \xi_{kk} \end{pmatrix}$$

$$A_{11}^{-1}A_{12}=\begin{pmatrix} b_{1k+1}\xi_{11}+\cdots+b_{kk+1}\xi_{1k} \\ \vdots \\ b_{1k+1}\xi_{k1}+\cdots+b_{kk+1}\xi_{kk} \end{pmatrix}$$

$$A_{21}A_{11}^{-1}+\left(b_{k+1,1}\xi_{11}+\cdots+b_{k+1,k}\xi_{k1},\cdots b_{k+1,1}\xi_{1k}+\cdots+b_{k+1,k}\xi_{kk}\right)$$

$$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}=b_{k+1,k+1}-\Big[b_{1,k+1}(b_{k+1,1}\xi_{11}+\cdots+b_{k+1,k}\xi_{k1})+\cdots$$
$$+b_{k,k+1}(b_{k+1,1}\xi_{1k}+\cdots+b_{k+1,k}\xi_{kk})\Big]$$

$$B_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}=-\begin{pmatrix} b_{1,k+1}\xi_{11}+\cdots+b_{k,k+1}\xi_{1k} \\ \vdots \\ b_{1,k+1}\xi_{k1}+\cdots+b_{k,k+1}\xi_{kk} \end{pmatrix}B_{22}$$

$$B_{21}=-B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$=-B_{22}(b_{k+1,1}\xi_{11}+\cdots+b_{k+1,k}\xi_{k1},\cdots,b_{k+1,1}\xi_{1k}+\cdots+b_{k+1k}\xi_{kk})$$

$$B_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}$$
$$=\begin{pmatrix} \xi_{11},\cdots\xi_{1k} \\ \vdots \\ \xi_{k1}\ \ \cdots\xi_{kk} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{1,k+1}\xi_{11}+\cdots+b_{kk+1}\ \xi_{1k} \\ \vdots \\ b_{1k+1}\ \xi_{k1}+\cdots+b_{k,k+1}\xi_{kk} \end{pmatrix}\times B_{22}\times$$
$$\times(b_{k+1,1}\xi_{11}+\cdots+b_{k+1,k}\xi_{k1},\cdots b_{k+1,1}\xi_{1k}+\cdots+b_{k+1,k}\xi_{kk})$$

因此得

$$\sum_{i,j=1}^{k+1}\xi'_{ij}=\sum_{i,j=1}^{k}\xi_{ij}+B_{22}\Big\{1-2(b_{1k+1}\xi_{11}+\cdots+b_{k,k+1}\xi_{1k})-\cdots$$
$$-2(b_{1,k+1}\xi_{k1}+\cdots+b_{k,k+1}\xi_{kk})+\Big[(b_{1,k+1}\xi_{11}+\cdots+b_{k,k+1}\xi_{1k})$$
$$+\cdots+(b_{1k+1}\xi_{k1}+\cdots+b_{k,k+1}\xi_{kk})\Big]^2\Big\}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{k}\xi_{ij}+B_{22}\Big[(b_{1k+1}\xi_{11}+\cdots+b_{kk+1}\xi_{1k})+\cdots+(b_{1,k+1}\xi_{k1}+\cdots+b_{k,k+1}\xi_{kk})-1\Big]^2$$

因为 $B_{22}=|M_k|/|M_{k+1}|>0$,

所以有

$$\sum_{i,j=1}^{k+1}\xi'_{ij}\geqslant\sum_{i,j=1}^{k}\xi_{ij}>0$$

因此得

$$\sigma^2_{\hat{\alpha}}=\frac{1}{\sum\limits_{i,j=1}^{k+1}\xi'_{ij}}\leqslant\frac{1}{\sum\limits_{i,j=1}^{k}\xi_{ij}}\leqslant b_{ll}\ (l=1,2,\cdots k)$$

最后我们来证明：

$$\sigma^2_{\hat{\alpha}}\leqslant b_{k+1,k+1}$$

对 M_{k+1} 作另一种方式地分块，令

$$M_{k+1}=\left(\begin{array}{c|ccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k+1} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k+1,1} & b_{k+1,2} & \cdots & b_{k+1,k+1} \end{array}\right)\triangleq\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

显然 A_{22} 也是正定对称阵。记 A_{22} 的逆阵为

$$A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix} \mu_{11}, & \cdots & \mu_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{k1} & \cdots & \mu_{kk} \end{pmatrix}$$

由归纳假定

$$\frac{1}{\sum\limits_{i,j=1}^{k}\mu_{ij}}\leqslant b_{ll}\ (l=2,\ 3,\ \cdots k+1)$$

因 M_{k+1} 的逆阵是唯一的，根据前面的推导，应有：

$$\frac{1}{\sum\limits_{i,j=1}^{k+1}\xi'_{ij}}\leqslant\frac{1}{\sum\limits_{i,j=1}^{k}\mu_{ji}}$$

故得：

$$\sigma^2_{\hat{\alpha}}\leqslant b_{k+1,k+1}$$

总之，对任意正整数 n，皆有

$$\sigma^2_{\hat{\alpha}}\leqslant\sigma^2_{\alpha i}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

在文〔1〕中已证明 $\hat{\alpha}$ 是 α 的无偏估计。可见文〔1〕中所采用的加权最小二乘估计，确实可提高估计的精度。

参 考 文 献

〔1〕陈兴钧、林景荣等，利用台风次声波确定台风方位的计算方法，华侨大学学报，1(1980)。

〔2〕北方交通大学铁道建筑系编，结构矩阵分析，中国建筑工业出版社，(1975)。

The Error Analysis For Weighted Least-Squares

Chen Xinggou

Abstract

This paper is a note for the last paper[1]. It proves that the weighted least-square method used in the last paper[1] can increase the accuracy in estimation.