第6卷 第2期 华侨大学学报 Vol.6 No.2
1985年5月 JOURNAL OF HUACHIAO UNIVERSITY May 1985

# A. J. Penico积分的上下界

陈祖礼

（应用数学系）

**摘 要**

本文指出积分 $\Phi(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2dt$ 在一些特殊的赋范线性空间的单位球面上可达到其上下确界。而在一致凸的 Banach 空间中的单位球面上却不能达到如〔1〕中所指出的上下界。

设 $E$ 是复赋范线性空间、$x$，$y\epsilon E$、称积分

$$\Phi(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x\cos t+y\sin t\|dt$$

为A. J. Penico 积分。在〔1〕中证明了下面两个结果。

**定理 1** 设 $E$ 是复赋范线性空间，$T$ 是 $E$ 的单位球，则 $E$ 是内积空间的充分必要条件是

$$\Phi(x, y)\leqslant 1 \quad 对所有 x，y\epsilon T 成立。\tag{1}$$

式（1）等价于内积空间中范数的平行四边形法则。因此积分 $\Phi(x, y)$ 有时也称为类似于平行四边形法则的积分。

**定理 2** 设 $E$ 是复赋范线性空间，$S$ 是 $E$ 的单位球面，则

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\leqslant\Phi(x, y)\leqslant 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right) 对所有的 x，y\epsilon S 成立。\tag{2}$$

并且对 $\Phi(x,y)$，上面所得出的上下界就一般的赋范线性空间来说是最好的上下界。在（1）中用下面的例子说明这上下界是最好的。

设 $R$ 表示实数全体，令 $l_2=\{(x_1, y_2)|x_1, x_2\epsilon R\}$，在 $l_2$ 中定义范数为

$$\|(x_1, x_2)\|=|x_1|+|x_2|$$

则

$$\Phi\Big[(1, 0), (0, 1)\Big]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(|\cos t|+|\sin t|)^2dt=1+\frac{2}{\pi}$$

$$\Phi\Big[(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\Big]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\Big(|\cos t+\sin t|+|\cos t-\sin t|\Big)^2dt$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

本文的目的是指出一些常见的特殊赋范线性空间可达到这上下界，但对一致凸 Banach

本文1984年10月26日收到。

空间却不然。

（一）收敛于零的数列空间 $c_0$。$x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}\in c_0$ 范数定义为

$$\|x\|=\sup|\xi_n|$$

令取 $x=\{1, -1, 0, 0, \cdots\}$，$y=\{1, 1, 0, 0, \cdots\}$，则

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2dt=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}|\cos t+\sin t|^2dt$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2dt=\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}|-\cos t+\sin t|^2dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}|\cos t+\sin t|^2dt$$

$$\pi\Phi(x, y)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}|\cos t+\sin t|^2dt=\pi+2 \quad \text{即}\ \Phi(x, y)=1+\frac{2}{\pi}$$

又另取 $x=\{0, 1, 0, 0, \cdots\}$，$y=\{1, 0, 0, \cdots\}$ 则

$$\int_0^{\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2dt=\int_0^{\pi}\sup\{|\sin t|^2, |\cos t|^2\}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\cos^2 tdt+\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\sin^2 tdt=1+\frac{\pi}{2}$$

即

$$\Phi(x, y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

于是 $\Phi(x, y)$ 在 $c_0$ 的单位球面上达到其上下界。又因为 $c_0$ 是收敛数列空间 $c$ 及有界数列空间 $m$ 的子空间。所以对后面这两个空间，$\Phi(x, y)$ 也都在它们的单位球面上达到其上下界。

（二）连续函数空间 $C[a, b]$。设 $x, y\in C[a, b]$ 则

$$\|x\cos t+y\sin t\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}|x(s)\cos t+y(s)\sin t|$$

令 $x(s)\equiv 1$，$y(s)$ 为连接 $(a, -1)$ 与 $(b, 1)$ 的直线。当 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，则

$$\|x\cos t+y\sin t\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}|x(s)\cos t+y(s)\sin t|$$

$$=\max_{a\leqslant s\leqslant b}|\cos t+y(s)\sin t|$$

$$=|\cos t+\sin t|$$

当 $\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\pi$ 时，$\cos t\leqslant 0$，则

$$\|x\cos t+y\sin t\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}|\cos t+y(s)\sin t|$$

$$=|\cos t-\sin t|$$

类似于（一）中的计算，$\Phi(x, y)$ 在 $C[a, b]$ 的单位球面上达到其上界。其次考察 $\Phi(x, y)$ 在 $C[a, b]$ 的单位球面上达到下界的情况。

设 $x=x(s)$ 为通过 $(a, 1)$ 与 $(b, 0)$ 的直线，$y=y(s)$ 为通过 $(a, 0)$ 与 $(b, -1)$ 的直线，则 $\|x\|=\|y\|=1$，并且 $x(s)=1+y(s)$

$$\|x\cos t+y\sin t\|=\max_{a\le s\le b}|x(s)\cos t+y(s)\sin t|$$
$$=\max_{a\le s\le b}|y(s)(\cos t+\sin t)+\cos t|$$

因为线性函数的最大值在两端点达到。当 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$\cos t\geqslant\sin t$ 而且 $y(s)$ 线性，故

$$\|x\cos t+y\sin t\|=|\cos t|$$

当 $\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin t\geqslant\cos t$ 且 $y(s)$ 线性，故

$$\|x\cos t+y\sin t\|=|\sin t|$$
$$\|y\cos t-x\sin t\|=\max_{a\le s\le b}|y(s)\cos t+x(s)\sin t|$$
$$=\max_{a\le s\le b}|y(s)(\cos t-\sin t)-\sin t|$$

$$\pi\Phi(x,\ y)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2dt+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\|y\cos t-x\sin t\|^2dt$$
$$=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}|\cos t|^2dt+2\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}|\sin t|^2dt=1+\frac{\pi}{2}$$

故

$$\Phi(x,\ y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

以上说明 $\Phi(x,\ y)$ 在 $C[a,\ b]$ 的单位球面上达到其上下界。因为 $C[a,\ b]$ 是有界函数空间 $B[a,\ b]$ 的子空间，从而可知对后面这个空间，$\Phi(x,\ y)$ 也在其单位球面上达到其上下界。

（三）有界变差函数空间 $V[a,\ b]$。

令 $D$ 表示区间 $[a,\ b]$ 的一个分法：$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$，范数定义为

$$\|x\|=|x(a)|+\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(x)$$
$$=|x(a)|+\sup_D\sum_{i=1}^{n}|x(t_i)-x(t_{i-1})|$$

先考察 $\Phi(x,\ y)$ 在 $V[a,\ b]$ 的单位球面上达到上界的情况。设 $C=\frac{a+b}{2}$，取

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{t-a}{c-a} & \text{当 } a\leqslant t\leqslant c\\ 1 & \text{当 } c\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$
$$y(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } a\leqslant t\leqslant c\\ \dfrac{t-c}{b-c} & \text{当 } c<t\leqslant b\end{cases}$$

则 $\|x\|=\|y\|=1$，而且若 $\alpha$，$\beta$ 为任意的数，则不难证明

$$\|\alpha x+\beta y\|=|\alpha|\|x\|+|\beta|\|y\|$$

因而

$$\Phi(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(|\cos t|+|\sin t|)^2dt$$

$$=1+\frac{1}{\pi}$$

即$\Phi(x, y)$在$V[a, b]$的单位球面上达到其上界。其次考察达到下界的情况。

设 $c=\frac{1}{2}(a+b)$，取

$$x(t)=\frac{t-a}{b-a}$$

$$y(t)=\begin{cases}-\dfrac{t-a}{b-a}, & \text{当 } a\leqslant t\leqslant c\\ \dfrac{t-a}{b-a}-1, & \text{当 } c<t\leqslant b\end{cases}$$

显然

$$\|x\|=\|y\|=1$$

并且

$$\|x\cos t+y\sin t\|=\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(x\cos t+y\sin t)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(x\cos t+y\sin t)$$

当 $a\leqslant s\leqslant c$ 时，$y(s)=-x(s)$，故

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(x\cos t+y\sin t)=|\cos t-\sin t|\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(x)$$

$$=\frac{1}{2}|\cos t-\sin t|$$

当 $c\leqslant s\leqslant b$ 时，$y(s)=x(s)-1$，故

$$\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(x\cos t+y\sin t)=\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}\Big[x\cos t+(x-1)\sin t\Big]$$

$$=\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}\Big[x(\cos t+\sin t)-\sin t\Big]$$

$$=\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}\Big[x(\cos t+\sin t)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}|\cos t+\sin t|$$

故

$$\Phi(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\Big[|\cos t+\sin t|+|\cos t-\sin t|\Big]^2dt$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

即$\Phi(x, y)$也在$V[a, b]$的单位球面上达到其下界。

（四）空间$l$及$L[a, b]$．从[1]中所举的例子可知对绝对收敛数列空间$l$，$\Phi(x, y)$也在其单位球面上达到其上、下界。今讨论勒贝格可积函数空间$L[a, b]$。仍设

$c=\frac{1}{2}(a+b)$，取

$$x(s)=\begin{cases}\dfrac{2}{b-a}, & 当\ a\leqslant s\leqslant c\\ 0, & 当\ c<s\leqslant b\end{cases}\qquad y(s)=\begin{cases}0, & 当\ a\leqslant s\leqslant c\\ \dfrac{2}{b-a}, & 当\ c<s\leqslant b\end{cases}$$

则

$$\|x\|=\int_a^b|x(s)|dt=\int_a^c\frac{2}{b-a}ds=1,$$

同理

$$\|y\|=1$$

$$\begin{aligned}\|x\cos t+y\sin t\|&=\int_a^b|x(s)\cos t+y(s)\sin t|ds\\&=\int_a^c|x(s)\cos t-y(s)\sin t|ds+\int_a^b|x(s)\cos t+y(s)\sin t|ds\\&=|\cos t|+|\sin t|\end{aligned}$$

可见$\Phi(x,\ y)$在$L[a,\ b]$的单位球面上达到其上界。

对于下界的情况。仍设 $c=\frac{1}{2}(a+b)$，取

$$x(s)=\frac{1}{b-a},\qquad y(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & 当\ a\leqslant s\leqslant c\\ \dfrac{-1}{b-a}, & 当\ c<s\leqslant b\end{cases}$$

则

$$\|x\|=\|y\|=1,$$

並且

$$\begin{aligned}\|x\cos t+y\sin t\|&=\int_a^b|x(s)\cos t+y(s)\sin t|ds\\&=\int_a^c\frac{1}{b-a}|\cos t+\sin t|ds+\int_c^b\frac{1}{b-a}|\cos t-\sin t|ds\\&=\frac{1}{2}|\cos t+\sin t|+\frac{1}{2}|\cos t-\sin t|\end{aligned}$$

故$\Phi(x,\ y)$也在$L[a,\ b]$的单位球面上达到其下界。

根据定理1，附带地得到在（一）至（四）中所提到的八个赋范线性空间都不是内积空间。

现在假定$X$是一致凸Banach空间，$x,\ y\in X$，在文[2]中指出：

等式$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$成立的$\Longleftrightarrow$存在$c>0$，使$y=cx$。

因而若设$S$为$X$的单位球面，$x,\ y\in S$，则

$$\begin{aligned}\pi\Phi(x,\ y)&=\int_0^\pi\|x\cos t+y\sin t\|^2dt<\int_0^\pi\Big[\|x\cos t\|+\|y\sin t\|\Big]^2dt\\&=\pi+2\end{aligned}$$

即$\Phi(x,\ y)$不可能在$X$的单位球面上达到其上界。由此我们顺便得到在（一）至（四）中所考察的八个赋范空间都不是一致凸空间。另一方面，在(2)中指出当$b>1$时，空间$l^p$及空间$L^p[a,\ b]$都是一致凸空间。对于一致凸空间，同样可得到$\Phi(x,\ y)$不能在它的单位球面上达到其下界[1]。

## 参 考 文 献

〔1〕A. J. Penico and C. V. Stanojevic, An integral analogue to parallelogram law, Proc. Amer. Math. Soc., 3(1980), 427—430.
〔2〕James A. Clar Rson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 40(1936), 396—414.

# Upper Bound and Lower Bound of the Penico's Integral

Chen Zuli

**Abstract**

This paper, shows that the integral $\Phi(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x\cos t+y\sin t\|^2dt$ can reach its upper bound and lower bound at the unit sphere in some special normed linear spaces. But it can not reach the upper bound and lower bound, as shown in [1], at the unit sphere in uniformly convex Banach spaces.